

## 6.4 Reziprozität

Die Zweitor-Theorie beschreibt die Beziehungen zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen linearer zeitunabhängiger Systeme durch die **Zweitormatrizen**. Die an den beiden Eingangsklemmen (Tor 1) anliegenden Signale sind beim elektrischen Zweitor Eingangsspannung  $U_1$  und Eingangsstrom  $I_1$ , entsprechend liegen an den Ausgangsklemmen Ausgangsspannung  $U_2$  und Ausgangsstrom  $I_2$ . Zwischen diesen vier Größen sind **Zweitorgleichungen** definierbar:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} & \text{Impedanzmatrix } \mathbf{Z} \\ & & & & \text{Admittanzmatrix } \mathbf{Y} \\ \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} & \text{Hybridmatrix } \mathbf{H} \\ & & & & \text{Inverse Hybridmatrix } \mathbf{G} \end{aligned}$$



**Abb. 6.9:** Elektrisches Zweitor mit technischem Zählpfeilsystem. Alle Größen sind im allgemeinen Fall komplex.

Außer diesen vier Matrizen sind noch die Kettenmatrix ( $\mathbf{A}$ ) und die inverse Kettenmatrix ( $\mathbf{B}$ ) definierbar; sie werden hier nicht benötigt. Jede Matrix beschreibt das Zweitor eindeutig, die Elemente einer Matrix können in die Elemente jeder anderen Matrix umgerechnet werden. Im allgemeinen Fall sind die vier Matrixelemente voneinander unabhängig. Bei passiven RLCÜ-Zweitoren, die nur aus Widerständen, Induktivitäten, Kapazitäten und Übertrager bestehen, verbleiben allerdings nur drei Freiheitsgrade [z.B. 7], zwei Matrixelemente sind dann in einfacher Form voneinander abhängig. Man nennt derartige Zweitore übertragungssymmetrisch oder **reziprok**. Mit sog. technischen\* Zählpfeilen [7] gilt bei reziproken Zweitoren:

$$Z_{12} = -Z_{21}, \quad Y_{12} = -Y_{21}, \quad H_{12} = H_{21}, \quad G_{12} = G_{21} \quad \text{Reziprozitätsbedingungen}$$

Setzt man diese Bedingungen in die Zweitorgleichungen ein und schafft mit  $U = 0$  bzw.  $I = 0$  einen entarteten Ausgangszustand, so ergeben sich einfache Beziehungen zwischen dem Betrieb in Vorwärts- und in Rückwärtsrichtung:

$U_1/I_2 = Z_{12}$ ( $I_1 = 0$ )	$Z_{21} = U_2/I_1$ ( $I_2 = 0$ )	$I_1/U_2 = Y_{12}$ ( $U_1 = 0$ )	$Y_{21} = I_2/U_1$ ( $U_2 = 0$ )
$U_1/U_2 = H_{12}$ ( $I_1 = 0$ )	$H_{21} = I_2/I_1$ ( $U_2 = 0$ )	$I_1/I_2 = G_{12}$ ( $U_1 = 0$ )	$G_{21} = U_2/U_1$ ( $I_2 = 0$ )

Als **Beispiel**: Die für primären Leerlauf ( $I_1 = 0$ ) ermittelte Spannungsrückwirkung  $H_{12} = U_1 / U_2$  entspricht der für sekundären Kurzschluss ( $U_2 = 0$ ) ermittelten Stromverstärkung  $H_{21} = I_2 / I_1$ .

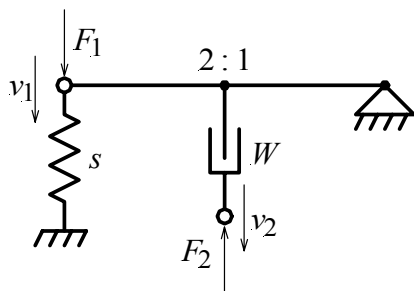
\* Neben dem technischen Zählpfeilsystem kann mit gleicher Berechtigung das symmetrische **Zählpfeilsystem** definiert werden; die Richtung des Ausgangsstroms ist dabei umgekehrt, bei den Reziprozitätsbedingungen ändern sich alle Vorzeichen. Das symmetrische Zählpfeilsystem wird hier nicht verwendet.

Etwas allgemeiner: Bei Kenntnis des Übertragungsverhaltens in eine Richtung (z.B. vom Polpaar 1 zum Polpaar 2, bzw. vom Tor 1 zum Tor 2) kann das Übertragungsverhalten in Gegenrichtung (vom Tor 2 zum Tor 1) ermittelt werden.

Dass ein Tonabnehmer kein rein elektrisches Zweitor ist, stellt für Reziprozitätsbetrachtungen keinen Hinderungsgrund dar: Mit den Wandlergleichungen  $\underline{F} = \alpha \cdot \underline{U}$  und  $\underline{I} = \alpha \cdot \underline{v}$  lassen sich die mechanischen in die elektrischen Signalgrößen umrechnen, und mit  $\underline{Z}_{el} = \underline{Z}_{mech} / \alpha^2$  können die Systemgrößen umgerechnet werden [3], sodass aus dem elektromechanischen Wandler-Zweitor ein rein elektrisches reziprokes Zweitor wird. Als entartete Klemmenbelastung ist theoretisch  $v = 0$  und  $F = 0$  definierbar, wobei aber nur  $F = 0$  praktische Bedeutung erlangt; die vollständige Unterbindung der Bewegung ist nicht genau genug realisierbar.

Von den vier Reziprozitätsbedingungen eignet sich die Gleichheit der G-Parameter am besten zur Berechnung des Piezo-Tonabnehmers. Definiert man das mit 1 indizierte Klemmenpaar als mechanische Seite und das mit 2 indizierte als elektrische Seite, so lauten die Randbedingungen: Aus  $U_1 = 0$  wird  $F = 0$  (keine externe Kraft, Saitenreiter unbelastet), und  $I_2 = 0$  bedeutet elektrischen Leerlauf (übliche Piezo-Beschaltung). Die gesuchte Kraft→Spannungs-Übertragung kann mithilfe der Reziprozitätsbedingungen aus einer (mittels Laser-Vibrometer messbaren) Spannung→Geschwindigkeits-Übertragung abgeleitet werden.

Als **Beispiel** für Reziprozitätsbeziehungen soll ein idealer Hebel untersucht werden, an den eine Feder und ein Dämpfungswiderstand montiert sind (**Abb. 6.10**). Das verwendete Pfeilsystem ist eine Option – auch andere Pfeilsysteme sind möglich.



$$s = \underline{F}/\underline{x} = j\omega \underline{F}/\underline{v} \quad \text{ideale Feder (Hooke)}$$

$$W = \underline{F}/\underline{v} \quad \text{ideale Reibung (Stokes)}$$

kleine Auslenkungen  $\approx$  linearer Betrieb.

**Abb. 6.10:** Mechanisches Zweitor als Beispiel; kein direkter Bezug zum Piezotonabnehmer.

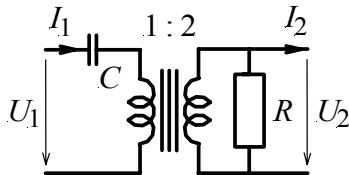
Die zu  $G_{12} = G_{21}$  gehörenden Randbedingungen werden mit  $\underline{F} = \alpha \cdot \underline{U}$  und  $\underline{I} = \alpha \cdot \underline{v}$  umgeformt auf einen ersten Betriebszustand mit mechanischem Eingangs-Leerlauf ( $F_1 = 0$ ) und einen zweiten Betriebszustand mit festgebremsten Ausgang ( $v_2 = 0$ ). Hierfür ergibt sich:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2s}{j\omega W} + \frac{1}{2} \quad \text{für } F_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{2s}{j\omega W} + \frac{1}{2} \quad \text{für } v_2 = 0$$

Im ersten Fall wird an der rechten Klemme (Index 2) angeregt, und das Geschwindigkeits-Verhältnis bestimmt; im zweiten Fall wird an der linken Klemme (Index 1) angeregt, und das Kräfte-Verhältnis bestimmt. In beiden Fällen ergibt sich dieselbe Übertragungsfunktion – allerdings nur für die angegebenen Lastzustände, und nicht etwa für alle Belastungsarten!

Mit den Algorithmen der **elektromechanischen Analogien** [z.B. 3] lässt sich das o.a. System in ein äquivalentes elektrisches System umformen. Von den Möglichkeiten der FI- bzw. FU-Analogie wird die zweite gewählt, weil sie dem im Piezo-Wandler vorliegenden physikalischen Wandlungsprinzip entspricht. Bei der Netzwerkstruktur ist dann allerdings zu berück-

sichtigen, dass kein isomorphes, sondern ein **duales** Netzwerk entsteht (die Flussgröße Kraft wird in die Potentialgröße Spannung abgebildet [3]). Die FU-Analogie wandelt eine Feder in eine Kapazität, einen Reibwiderstand in einen elektrischen Widerstand, und einen Hebel in einen idealen (induktivitätsfreien) Übertrager, der auch Gleichstrom übertragen kann. Da beim Hebel das Hebelarmverhältnis, und damit  $v_1/v_2$  angegeben wird, beim Übertrager aber das hierzu duale *Spannungs*verhältnis, kehrt sich das Übersetzungsverhältnis um (**Abb. 6.11**).

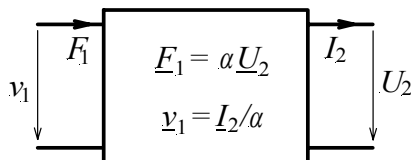


**Abb. 6.11:** Mittels FU-Analogie aus Abb. 6.10 abgeleitetes elektrisches Ersatzschaltbild. Gleiche Geschwindigkeit ergibt gleichen Strom, d.h. Reihenschaltung, gleiche Kraft ergibt gleiche Spannung, also Parallelschaltung (duales Netzwerk).

Für die beiden Lastzustände  $U_1 = 0$  bzw.  $I_2 = 0$  kann hierfür die Übertragungsfunktion berechnet werden; dasselbe Ergebnis erhält man mit der Umformung  $C = \alpha^2/s$  und  $R = W/\alpha^2$ :

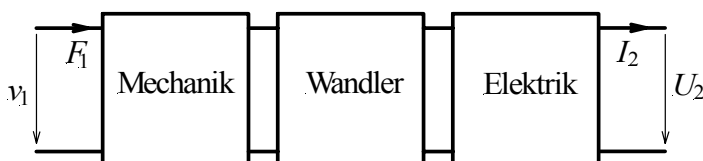
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2}{j\omega RC} + \frac{1}{2} \quad \text{für } U_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{2}{j\omega RC} + \frac{1}{2} \quad \text{für } I_2 = 0 \quad \diamond$$

Im Gegensatz zu einem rein mechanischen System (Abb. 6.10) bzw. einem rein elektrischen System (Abb. 6.11) ist der **Piezo-Tonabnehmer** ein elektromechanisches System. Auch hierfür gelten Reziprozitätsbeziehungen. Beim idealen Wandler (**Abb. 6.12**) sieht man sofort die Gleichheit der Übertragungsfaktoren: Für primären Leerlauf ( $F_1 = 0$ ) ergibt sich  $I_2 / v_1 = \alpha$ , für sekundären Leerlauf ( $I_2 = 0$ ) ergibt sich ebenfalls die Wandlerkonstante  $F_1 / U_2 = \alpha$ . Beim idealen Wandler gilt diese Gleichheit sogar für jeden Lastzustand – und damit natürlich auch für die Randbedingungen der Reziprozitätsbeziehungen.



**Abb. 6.12:** Idealer Piezo-Wandler

Gegenüber einem idealen Piezo-Wandler enthält der reale Piezo-Wandler mechanische und elektrische Komponenten, die in Abb. 6.12 als mechanisches Zweitor an der linken Seite und als elektrisches Zweitor an der rechten Seite anzukoppeln sind. Sofern diese Zweitore nur Massen, Federn, Reibwiderstände und Hebel bzw. Induktivitäten, Kapazitäten, Widerstände und Übertrager enthalten, sind sie reziprok, und damit ist auch das Gesamtsystem reziprok. **Abb. 6.13** zeigt eine derartige Zweitor-Kettenschaltung, die natürlich wieder zu einem einzigen äquivalenten Zweitor zusammengefasst werden kann. Unter den o.a. Randbedingungen erhält man für  $F_1 / U_2$  und  $I_2 / v_1$  denselben Proportionalitätskoeffizient, der nun allerdings nicht mehr der Wandlerkonstante  $\alpha$  entspricht, sondern in u.U. komplizierter Weise von der Frequenz abhängt. Diese Frequenzabhängigkeit lässt sich im  $I_2 \rightarrow v_1$ -Betrieb relativ leicht messen, und auf den (schwieriger zu messenden)  $F_1 \rightarrow U_2$ -Betrieb übertragen.



**Abb. 6.13:** Realer Piezo-Wandler

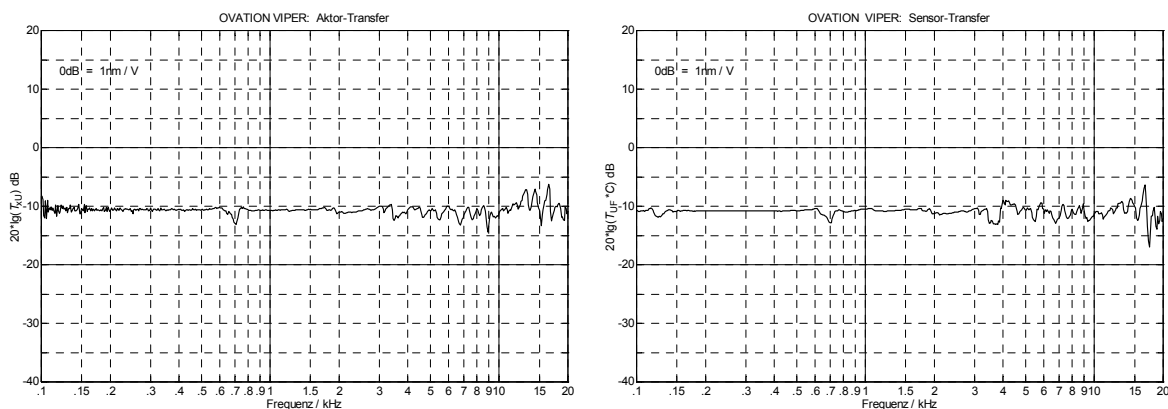
Für den  $I_2 \rightarrow v_1$ -Betrieb wird an den elektrischen Klemmen des Tonabnehmers ein Generator angeschlossen, der eine eingeprägte Wechselspannung erzeugt. Da der Tonabnehmer unabhängig von seiner mechanischen Belastung in guter Näherung als reine Kapazität wirkt, kann von der elektrischen Spannung  $\underline{U}_2$  leicht auf den Strom  $\underline{I}_2$  geschlossen werden ( $\underline{I}_2 = j\omega C \underline{U}_2$ ). Dieser Strom  $\rightarrow$  Schnelle-Übertragungskoeffizient  $T_{vI}$  entspricht dem Kraft  $\rightarrow$  Spannungs-Übertragungskoeffizient  $T_{UF}$  bei elektrischem Leerlauf:

$$\frac{\underline{U}_2}{F_1} = \frac{v_1}{\underline{I}_2} = \frac{v_1}{j\omega C \cdot \underline{U}_2} = \frac{x_1}{C \cdot \underline{U}_2} \quad T_{UF} \text{ für } I_2 = 0, \quad T_{vI} \text{ für } F_1 = 0$$

Die Schwinggeschwindigkeit  $v_1$  lässt sich z.B. mit einem Laser-Vibrometer bestimmen, wobei wegen der geringen Messwerte geeignete Mittelungsverfahren unabdingbar sind.

## 6.5 Aktorbetrieb

Piezoelektrische Materialien wandeln in beide Richtungen: Mechanische in elektrische Größen (Sensorbetrieb), und elektrische in mechanische Größen (Aktorbetrieb). Legt man an die elektrischen Anschlüsse des Tonabnehmers eine elektrische Wechselspannung an, so vibriert der Stegreiter auf und ab. Wenig. Sehr wenig: Nur einige Nanometer. Da nicht bekannt war, ab welcher Spannung der Kristall irreversibel geschädigt wird, wurden die folgenden Messungen mit einer Effektivspannung von 10V durchgeführt – ohne erkennbare Beschädigung. Die Ovation-Gitarre lag während der Messung im Koffer, die Schwinggeschwindigkeit des Stegreiters wurde mit einem **Laser-Vibrometer** (Polytec) gemessen. Das in Abb. 6.8 dargestellte Ersatzschaltbild lässt für einen masselosen Stegreiter (Idealisierung) eine frequenzunabhängige *Auslenkung* erwarten, wenn eine frequenzunabhängige Spannung eingepreßt wird. Da aber das auf dem Dopplereffekt beruhende Vibrometer die *Schwinggeschwindigkeit* als originale Größe misst, wird die Messung um so schwieriger, je niedriger die Frequenz ist. Mit hinreichend schmalbandigen Filtern sind aber auch im niederfrequenten Bereich kohärente Ergebnisse erreichbar (**Abb. 6.14**). Sowohl die Aktor- als auch die Sensor-Messung zeigt ein in erster Näherung frequenzunabhängiges Übertragungsmaß – aber auch kleinere Resonanzzacken, die zum überwiegenden Teil von der Gitarre, und nicht vom Messverfahren stammen.



**Abb. 6.14:** Mit dem Laser-Vibrometer gemessenes Übertragungsmaß  $G_{XU}$  (links). Zum Vergleich ist im rechten Bild die entsprechende Sensor-Messung dargestellt:  $T_{XU} = C \cdot T_{UF}$ . Die Übereinstimmung ist beeindruckend.