

2.4 Einschwingvorgänge

Die Systemtheorie beschreibt lineare zeitinvariante (LZI-) Systeme durch die **Impulsantwort**. Die Impulsantwort $h(t)$ ist eigentlich eine *Systemgröße*; man kann sie sich aber auch als eine *Signalgröße* vorstellen, die am Systemausgang anliegt, wenn der Systemeingang mit einem (Dirac-) Impuls $\delta(t)$ angeregt wird. Verwendet man anstelle des Dirac-Impulses dessen zeitliches Partikulärintegral, die Sprungfunktion, so entsteht am Systemausgang das zeitliche Partikulärintegral der Impulsantwort, die **Sprungantwort**. Dirac-Impuls und Sprung sind Idealisierungen, die in der Realität nur näherungsweise vorkommen. In einer Vorüberlegung soll die Saite mit einem **Kraftsprung** angeregt werden: Eine von außen auf die Saite einwirkende Querkraft ändert ihren Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ von 0 auf F , die Saite ist für negative Zeiten bewegungslos in Ruheposition (nicht ausgelenkt). Für diese Modellbetrachtung ist es unwichtig, wie so ein Kraftsprung realisiert werden könnte, wichtig ist aber, dass F konstant bleibt, und insbesondere nicht von der Auslenkung abhängt. Die Saite ist an *einer* Stelle ($z = 0$) unnachgiebig gelagert, das rechte Lager ist sehr weit entfernt. Im Abstand d vom Lager greift die **externe Kraft** F an der Saite an (**Abb. 2.18**).

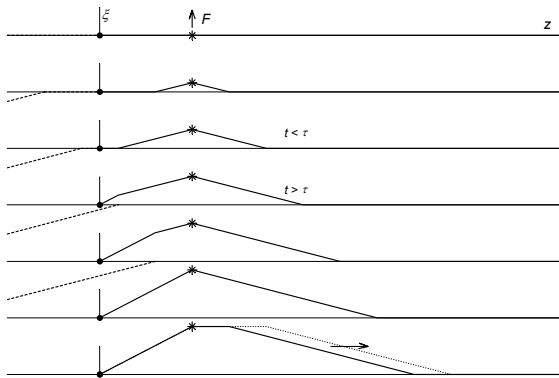


Abb. 2.18: Ortsfunktionen der Auslenkung. Von oben nach unten sind 7 aufeinanderfolgende Zustände gezeichnet. Das unnachgiebige Lager ist durch einen Punkt gekennzeichnet, an der mit einem Stern markierten Stelle greift eine konstante externe Kraft F an. In den ersten 5 Bildern ist die von links kommende Spiegelwelle gestrichelt eingezeichnet, in den letzten beiden Bildern nicht mehr. Der weitere Verlauf der Welle ist im untersten Bild gepunktet dargestellt.

Durch die Saitendaten ist der Wellenwiderstand Z_W definiert. Solange am Anregungspunkt (Stern) noch keine Reflexion angekommen ist, beschreibt Z_W den Quotient zwischen Kraft F und Schnelle v . Da der Anregungspunkt aber mit *zwei* Leitungen belastet ist (nach rechts und nach links), ist aus externer Sicht der Eingangswiderstand an dieser Stelle verdoppelt, also $2Z_W$. Bei Analogiebetrachtungen mit einer elektrischen Leitung muss berücksichtigt werden, dass die F - I -Analogie reziproke Widerstände ergibt: Impedanz \leftrightarrow Admittanz. Das Einprägen einer konstanten Kraft am Stern führt zu einer Querbewegung mit konstanter Schnelle: $v = F/(2Z_W)$. Die **Reflexion** wird durch eine von links kommende Spiegelwelle berücksichtigt, die nach der Zeit $\tau = 2d/c$ den Stern erreicht ($c =$ Ausbreitungsgeschwindigkeit). Für $t > \tau$ wird der Quotient von F und v nicht mehr durch Z_W bestimmt, denn nun sind beim Stern zwei Wellen überlagert. Die beiden entgegengesetzten Schnellewellen bewirken, dass bei $t = \tau$ der mit einem Stern markierte Saitenpunkt seine Schnelle von v auf null ändert, für $t > \tau$ bleibt er ortsfest ausgelenkt. Seine in diesem Punkt erreichte Auslenkung $\hat{\xi}$ kann berechnet werden:

$$\hat{\xi} = \tau \cdot v = \frac{2d \cdot F}{c \cdot 2Z_W} = \frac{d \cdot F}{\Psi} \quad \text{Maximalauslenkung am Stern, } t \geq \tau$$

Denselben Wert erhält man mit dem Kräfteparallelogramm, wenn man die Saitenspannkraft Ψ und die Querkraft F orthogonal zueinander ansetzt: $\hat{\xi}/d = F/\Psi$.

Der Zeitpunkt $t = \tau$ trennt zwei verschiedene Vorgänge: Während $t < \tau$ findet der Einschwingvorgang statt (der Begriff Einschwingen ist nicht wörtlich zu nehmen, die Bewegung ist aperiodisch). Für $t > \tau$ ist zwischen dem Lager (Punkt) und dem Kraftangriffspunkt (Stern) der stationäre Endzustand erreicht.

Falls, wie in Abb. 2.18 dargestellt, das rechte Lager sehr weit entfernt ist, läuft eine im Bild gepunktet gezeichnete Flanke ungestört nach rechts, das Saitenstück zwischen dem Lager und dem Stern kommt zum Zeitpunkt τ zur Ruhe und verharrt dort bewegungslos. Falls aber auch auf der rechten Seite Reflexionen erfolgen können, entsteht eine kontinuierlich schwingende **stehende Welle**. Trotzdem wird mit diesem Modell ein Anzupfvorgang nicht nachgebildet, denn bei ihm springt die Kraft nicht von 0 auf F , sondern von F auf 0. Unter der LZI-Voraussetzung kann aber ein $F \rightarrow 0$ -Sprung als Summe eines negativen Kraft-Sprunges und einer für alle Zeit konstanten Kraft aufgefasst werden:

$$F = F_1 + F_2; \quad F_1 = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\hat{F} & t > 0 \end{cases}; \quad F_2 = \hat{F} .$$

Dann lauten die Randbedingungen: Für negative Zeit wirkt eine konstante Kraft \hat{F} auf einen Saitenpunkt, die Saite ist dreieckförmig ausgelenkt, aber in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ springt die Kraft von \hat{F} auf 0, es beginnt eine Schwingung, die sich der dreieckförmigen Auslenkung überlagert. In **Abb. 2.19** ist die Ausgangssituation ($t < 0$) dargestellt. Die zeitlich konstante externe Kraft \hat{F} findet ihre Gegenkräfte in den Lagerkräften F_L und F_R . Die Vorzeichen der internen Saitenkräfte und der externen Kräfte sind gewöhnungsbedürftig, aber konsistent. Für positive Zeit $t > 0$ entfällt die externe Kraft \hat{F} , ab diesem Zeitpunkt müssen deshalb die beiden Lagerkräfte mittelwertfrei sein (**Abb. 2.20**).

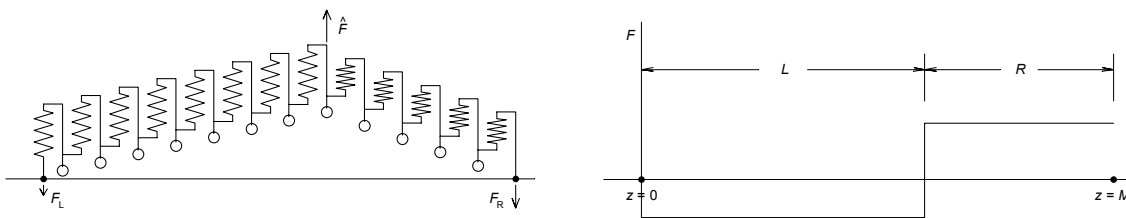


Abb. 2.19: Feder-Masse-Modell für $t < 0$ (linkes Bild), und saiteninterne Kraft-Ortsfunktion hierfür.

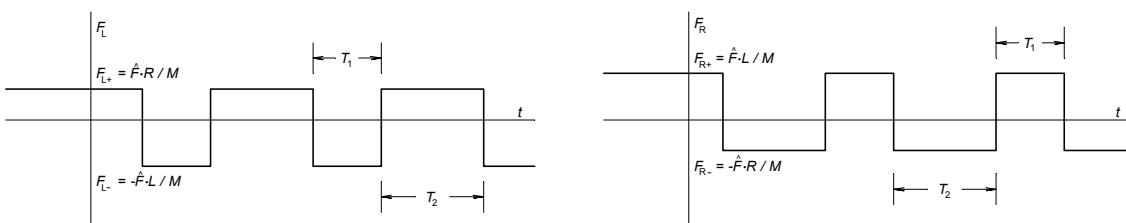


Abb. 2.20: Zeitfunktionen der Lagerkräfte; bei $t = 0$ springt die Anregung \hat{F} auf null. Die Vorzeichen der Lagerkräfte sind untereinander vergleichbar definiert: Wenn die Saite in ξ -Richtung ausgelenkt wird, muss an beiden Lagern eine Gegenkraft wirken; ihre Richtung ist in Abb. 2.19 mit einem Pfeil dargestellt. Die Saitenlänge ist M , aufgeteilt in einen linken (L) und rechten Teil (R). $T_1 = TR/M$, $T_2 = TL/M$, $T = 1/f_G$.