

5.8 Nichtlineare Verzerrungen

Sowohl die Messungen am Motorprüfstand (Kap. 5.4.4), als auch die Shakermessungen (Abb. 5.4.23) lassen als Abstandsfunktionen (nichtlineare) Potenzfunktionen vermuten – bei einem divergierenden Magnetfeld nicht weiter überraschend. Nichtlineare Funktionen führen bei sinusförmiger Anregung aber zu nichtlinearen Verzerrungen, d.h. zur Erzeugung neuer Frequenzen. Nur für sehr kleine Auslenkungen kann ein derartiges System als näherungsweise linear betrachtet werden; die im praktischen Spielbetrieb entstehenden Amplituden sind aber doch so groß, dass auch das Großsignalverhalten zu untersuchen ist.

Zur Erläuterung der grundlegenden Zusammenhänge soll zunächst ein System betrachtet werden, dessen Übertragungskennlinie einen linearen und einen quadratischen Term aufweist:

$$y(t) = a \cdot x(t) + b \cdot x^2(t); \quad x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{Übertragungskennlinie; Signal}$$

Eine quadrierte Sinusfunktion kann als Überlagerung eines (konstanten) Gleichanteils und einer Schwingung mit doppelter Frequenz aufgefasst werden:

$$y(t) = a \cdot \hat{x} \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \hat{x}^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \quad \text{nichtlinear verzerrtes Signal}$$

Die Spektraldarstellung von $y(t)$ zeigt drei Komponenten: Den Gleichanteil bei 0 Hz, die erste Harmonische bei ω , und die zweite Harmonische bei 2ω . Hieraus ergibt sich der quadratische Klirrfaktor k_2 zu:

$$k_2 = \frac{b \cdot \hat{x}^2}{\hat{x} \cdot \sqrt{4a^2 + b^2} \cdot \hat{x}^2} \approx \frac{b \cdot \hat{x}}{2a} \quad \text{quadratischer Klirrfaktor}$$

Anstelle des Klirrfaktors verwendet man häufig die (quadratische) **Klirrdämpfung**:

$$a_{k_2} = 20 \cdot \lg(1/k_2) \text{ dB} \approx L_1 - L_2 \quad \text{Klirrdämpfung}$$

Hierbei ist L_1 der Pegel der 1. Harmonischen, und L_2 der Pegel der 2. Harmonischen. Die Näherung gilt streng genommen nur für kleine Aussteuerungen, wird im Folgenden aber ohne Einschränkung verwendet.

Im **allgemeinen Fall** enthält die Übertragungskennlinie nicht nur einen quadratischen Verzerrungsterm, sondern zusätzliche Reihenglieder höherer Ordnung:

$$y(t) = a \cdot x(t) + b \cdot x^2(t) + c \cdot x^3(t) + \dots \quad \text{allgemeine Kennlinie}$$

In eine derartige Reihe kann jede stetige Funktion entwickelt werden (Taylor-MacLaurin). Die zugehörige Spektraldarstellung enthält hierbei nicht nur die zusätzliche 2. Harmonische, sondern weitere Linien (höhere Harmonische) bei ganzzahlig Vielfachen der Grundfrequenz. Bei Potenzfunktionen nehmen die Verzerrungsanteile aber zu höheren Ordnungen hin ab, weswegen vereinfachend nur die dominierenden quadratischen Verzerrungen betrachtet werden sollen.

Wenn ein nichtlineares System nicht mit einer monofrequenten Schwingung angeregt wird, sondern mit einem **Frequenzgemisch**, entstehen nicht nur Vielfache der Grundfrequenzen, sondern auch Differenz- und Summenfrequenzen. Bei der idealen, **dispersionsfreien** Saite geht man von exakt harmonischen Teiltönen aus, also z.B. 100, 200, 300, 400 Hz. Die von einer Nichtlinearität im o.a. Sinn erzeugten Differenztöne treffen exakt wieder auf bereits vorhandene Frequenzstellen. Reale Saiten weisen durch ihre Biegesteifigkeit aber Dispersion und Teiltönspreizungen auf, wodurch komplizierte Spektren entstehen. Zu jedem Primärton (z.B. 100, 201, 302.3, 404 Hz) bilden sich nahe benachbarte Linien, die zu zusätzlichen schwebungsähnlichen **Modulationen** führen.

Die in **Abb. 5.8.1** dargestellte typische Übertragungskennlinie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Saite/Magnetpol-Distanz und dem Magnetfluss. Ohne Aussteuerung beträgt in diesem Beispiel die Saite/Magnetpol-Distanz $d = 2\text{ mm}$ (Arbeitspunkt). Eine sinusförmige Aussteuerung mit 1,5 mm Amplitude führt zu einer nichtlinearen Flussänderung, bei der die negativen Halbwellen betragsmäßig kleiner sind als die positiven. Die induzierte Spannung ist proportional zur zeitlichen Flussänderung (Induktionsgesetz, $d\Phi / dt$), es entsteht ein sägezahnähnlicher Spannungs-Verlauf. In diesem Beispiel ist die quadratische Klirrdämpfung ca. 12 dB, was einem quadratischen Klirrfaktor von 25% entspricht. Die kubische Klirrdämpfung beträgt ca. 26 dB ($k_3 = 0,5\%$).

Näherungsweise ist der quadratische Klirrfaktor proportional zur Aussteuerung, der kubische Klirrfaktor ist proportional zum Quadrat der Aussteuerung. Für 0,5 mm Amplitude nimmt im o.a. Beispiel k_2 auf ca. 8 % ab, k_3 nimmt auf ca. 0,055 % ab.

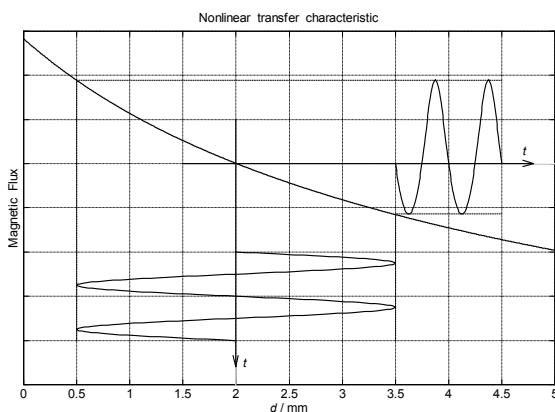
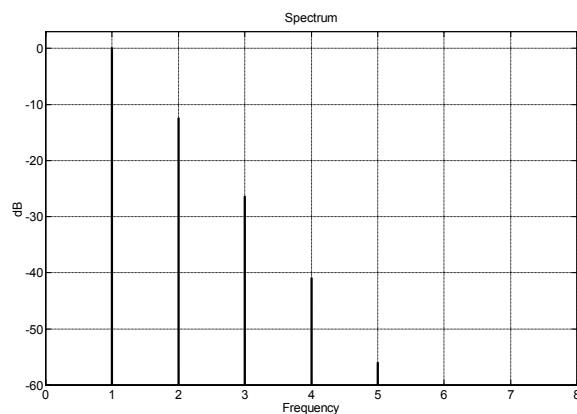
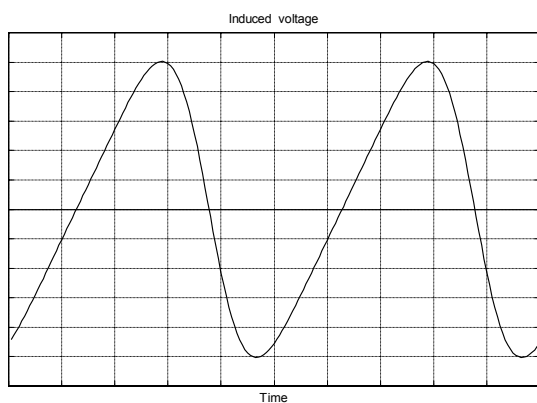


Abb. 5.8.1: Gekrümmte Übertragungskennlinie mit sinusförmiger Aussteuerung (links). Die zeitliche Ableitung des verzerrten Magnetflusses ist sägezahnförmig (links unten), das Spektrum enthält alle ganzzahligen Harmonischen (unten).



Die folgenden Messkurven wurden auf dem Shakerprüfstand bei 84 Hz ermittelt. Der mit einem Beschleunigungsaufnehmer gemessene Eigenklirrfaktor des Shakers betrug zunächst $k_2 = 2\%$. Durch Kompensation konnte dieser Wert auf 0,1% verbessert werden, was in Anbetracht der deutlich höheren Tonabnehmerverzerrungen ausreicht. In **Abb. 5.8.2** sind Messergebnisse für Singlecoil- und Humbucker-Tonabnehmer dargestellt. Die Auslenkungsamplitude betrug bei allen Messungen 0,4 mm, die lichte Weite (Distanz d) zwischen Saite und Magnetpol wurde zwischen 0,5 mm und 5 mm variiert.

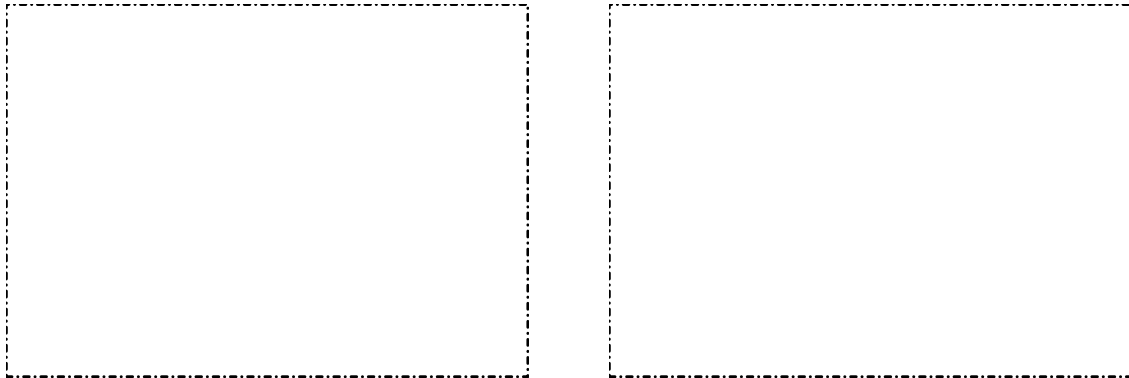


Abb. 5.8.2: Klirrdämpfungen a_{k2} , $f = 84$ Hz, Auslenkungsamplitude = 0,4 mm. Saitendurchmesser = 0,66 mm. Saite/Magnetpoldistanz d als Abszisse. Beim T-Iommy-Tonabnehmer ist die Saite/Gehäuse-Distanz angegeben, der Abstand zum Magnetpol ist folglich größer, die Kurve muss zum Vergleich nach rechts geschoben werden.

Bei allen Tonabnehmern zeigte sich mit zunehmender Distanz eine Verzerrungsabnahme, im relevanten Abstandsbereich beträgt der quadratische Klirrfaktor für 0,4 mm Auslenkung 4 – 5 %. Berücksichtigt man, dass bei starken Saitenanschlägen 2 mm Auslenkung erreicht werden, so sind Klirrfaktoren über 10% möglich. Dies ist jedoch kein Charakteristikum eines speziellen Tonabnehmers, sondern tritt bei allen untersuchten Tonabnehmern in ähnlicher Weise auf. Wie bei den Kammfilterfrequenzgängen ist auch bei Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, dass jeder Tonabnehmer Teil des Musikinstrumentes ist; seine Übertragungscharakteristik ist objektiv beschreibbar, aber nur subjektiv bewertbar. Da die Schwingung jeder Saite individuell verzerrt wird (ohne Interaktion mit Nachbarseiten, siehe später), tritt die Nichtlinearität des Tonabnehmers weit weniger spektakulär in Erscheinung, als man aufgrund der Zahlenwerte vermuten könnte. Deutlich hörbare Verzerrungen entstehen vor allem in der an den Tonabnehmer angeschlossenen Elektronik, nicht im Tonabnehmer selbst.

Abb. 5.8.3 vergleicht Messergebnisse mit Berechnungen. Die Feld-Übertragungskennlinie eines **Stratocaster**-Tonabnehmers folgt in guter Näherung einer einfachen **Potenzfunktion**:

$$\Phi = K_0 + K_1 \cdot (\Delta + d + x(t))^{-1} \quad \Delta = 4,3 \text{ mm} \quad \text{Feld-Übertragungskennlinie}$$

Die Pegelverläufe der ersten und zweiten Harmonischen in Abhängigkeit von der Distanz d (links) und der Auslenkungsamplitude \hat{x} (rechts) stimmen sehr gut mit den Messwerten überein. Mit der Konstante K_0 kann der statische Magnetfluss (ohne Auslenkung) definiert werden, ihr Wert ist für die Wechselgrößen bedeutungslos (fällt beim Differenzieren weg). Die Konstante K_1 bestimmt den Übertragungskoeffizient. Für kleine Saiten-Auslenkungen erhält man (mit 7600 Windungen) $K_1 = 1,1 \cdot 10^{-9}$ Vsm. Setzt man als durchströmte Fläche den Magnetquerschnitt an, so ergibt sich mit $d = 2$ mm und $\hat{x} = 0,4$ mm eine Flussdichteamplitude

von 0,5 mT. Dies ist aber nur eine grobe Abschätzung, denn der Magnetfluss ist nicht nur auf den Magnetquerschnitt konzentriert, sondern streut auch in benachbarte Bereiche; die Fläche ist folglich größer als angenommen. Gleichzeitig muss aber auch berücksichtigt werden, dass nicht alle Windungen von diesem Magnetfluss durchströmt werden; die effektive Windungszahl ist deshalb geringer als angenommen. Erfreulicherweise ist die Tendenz der beiden Fehler gegenläufig, die Abschätzung sollte deshalb nicht allzu falsch sein. Gegenüber dem Gleichanteil der Flussdichte, der an der Magnetstirnseite bei ca. 100 mT liegt, ist für die o.a. Parameter der Wechselanteil sehr gering, zur Berechnung der Grundschwingung ist deshalb eine Linearisierung ohne große Fehler möglich. Das nichtlineare Verhalten wird durch die angegebene Kennlinie in ausreichender Genauigkeit beschrieben.

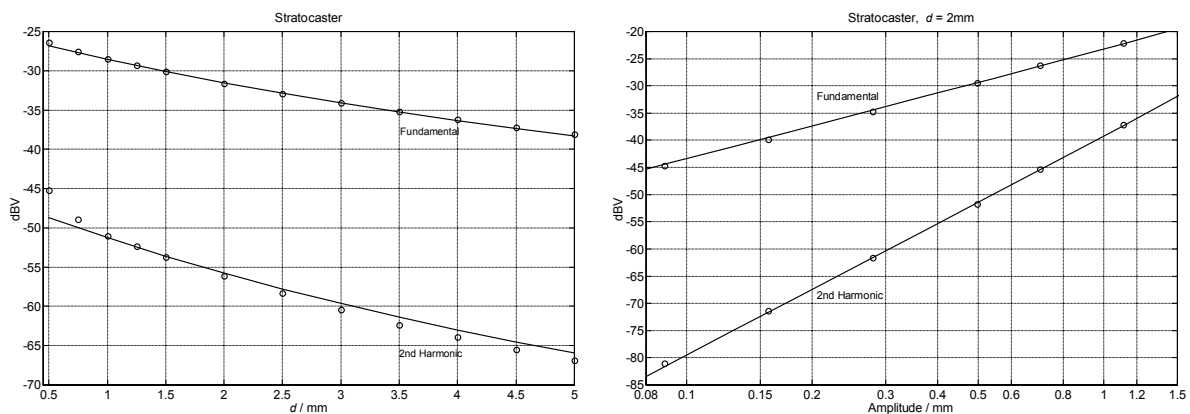


Abb. 5.8.3: Abhängigkeit der Pegel der 1. und 2. Harmonischen von Distanz (links) bzw. Amplitude (rechts). Die eingezeichneten Punkte sind Messwerte, die Linien wurden mit der o.a. Potenzfunktion berechnet.

Nun erfolgt ja die reale Saitenschwingung nicht nur mit einer einzigen Frequenz, sondern mit einem aus vielen Teiltönen bestehenden **Frequenzgemisch**. Wären die Frequenzen dieser Teiltöne exakt ganzzahlig zur Grundfrequenz, so entstünden aufgrund der Tonabnehmernichtlinearität nur Verzerrungskomponenten bei bereits vorhandenen Frequenzen. Beispielsweise erzeugt die kubische Verzerrung des Grundtones (u.a.) einen Ton bei der dreifachen Grundfrequenz – d.h. exakt bei der Frequenz des dritten Teiltönen (3. Harmonische). Die Saitenteiltonfrequenzen sind aber **nicht exakt harmonisch**: Saiten-Biegesteifigkeit, Tonabnehmer-Magnetfeld und frequenzabhängige Lagerimpedanzen führen zu einer Spreizung der Teiltonfrequenzen. So könnte beispielsweise bei einer exakt auf 82,0 Hz gestimmten E₂-Saite die 3. Harmonische von 246,0 Hz auf 246,3 Hz verschoben sein. Wird hierbei die Grundschwingung kubisch verzerrt, so entsteht (u.a.) eine Verzerrungskomponente bei $3 \cdot 82 \text{ Hz} = 246,0 \text{ Hz}$, die zusammen mit der 3. Harmonischen (246,3 Hz) eine schwebungsähnliche Amplitudenänderung produziert. Da aber jede reale Saitenschwingung sowieso schon Teiltonmodulationen aufweist, ist die vom Tonabnehmer erzeugte zusätzliche Modulation eher unwesentlich.

Völlig unbedeutend sind **nichtlineare Saiten-Interaktionen**: Die von zwei verschiedenen Saiten erzeugten Primärtöne (f_1, f_2) interagieren und produzieren an nichtlinearen Kennlinien Summen- und Differenzöne ($n \cdot f_1 \pm m \cdot f_2$). Um den Effekt quantitativ auszumessen, wurden zwei benachbarte Saiten stark angeschlagen und die Tonabnehmerspannung analysiert. Die Messungen erfolgten an folgenden Tonabnehmern: Gibson '57-Classic, Gibson Tony Iommi, DiMarzio DP184, Fender Texas-Special-Telecaster. Selbst bei nur 1mm Abstand zwischen Saite und Magnet blieben die auftretenden Intermodulationen unter 0,1%. Die Hauptursache der Tonabnehmerverzerrungen ist der nichtlinear von der Saitenposition abhängende magnetische Widerstand des Luftfeldes zwischen Saite und Magnet. Die in ca. 1 cm Abstand

schwingende Nachbarsaite hat hierauf aber praktisch keinen Einfluss. Im Magnet (bzw. in feldführenden Polstücken) überlagern sich zwar die von den einzelnen Saiten erzeugten Magnetflüsse – die relativen Flussänderungen sind aber so klein, dass die eigentlich nicht-lineare Hysteresekurve linearisiert werden darf. Saiten-Interaktionen und -Intermodulationen spielen erst eine wesentliche Rolle, wenn im Verstärker nichtlineare Verzerrungen auftreten.

Beim Begriff **Intermodulationen** kann man aber (neben den zwischen zwei Saiten auftretenden Interaktionen) auch an die von den einzelnen Teiltönen einer Saite erzeugten Kombinationstöne denken. Starke niederfrequente Saitenauslenkungen verschieben den Arbeitspunkt auf der nichtlinearen Übertragungskennlinie (Abb. 5.8.1), und als Folge davon ändert sich die Amplitude höherfrequenter Teiltöne. Quantitative Daten lieferte wieder der Shaker-Prüfstand: Eine D'Addario-Saite (0,66 mm Durchmesser, PL026) war auf 2 mm Distanz zum Magnetpol eingestellt. Eine niederfrequente Schwingung (20 Hz, 0,55 mm Amplitude) wurde zu einer höherfrequenten Schwingung (80 Hz, 0,23 mm Amplitude) addiert, die Schwingungsrichtung verlief entlang der Magnetachse. Wegen der Nichtlinearität entstehen neue Spektralanteile, wobei vor allem die 60-Hz- und die 100-Hz-Linie interessieren. Im idealisierten **Modell** wird das Zweitongemisch $x(t) = \cos(\omega t) + k \cdot \cos(\Omega t)$ quadratisch verzerrt: $y(t) = \kappa \cdot x(t) + x^2(t)$.

$$y(t) = \kappa \cdot x(t) + \cos^2(\omega t) + k^2 \cdot \cos^2(\Omega t) + 2k \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\Omega t). \quad \text{Nichtlinearität}$$

Mit $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ sowie $\cos \alpha \cdot \cos \beta = [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]/2$ können die an der Nichtlinearität entstehenden neuen Frequenzen leicht berechnet werden: Neben dem hier unwichtigen Gleichanteil (0 Hz) entstehen (zusätzlich zum Primärsignal) die doppelten Primärfrequenzen (2ω , 2Ω) und die Summen- und Differenzfrequenz $\Omega + \omega$, $\Omega - \omega$. Das aus $\Omega - \omega$, Ω und $\Omega + \omega$ bestehende Dreitongemisch lässt sich als klassische Amplitudenmodulation interpretieren [z.B. 3]. Etwas anschaulicher: Der tieffrequente Primärton (im Beispiel 20 Hz) verschiebt den Arbeitspunkt auf der gekrümmten (nichtlinearen) Kennlinie hin und her, die zusätzlich vorhandene höherfrequente Aussteuerung (80 Hz) findet somit eine zeitabhängige Kennliniensteigung vor: In Bereichen mit großer Steigung ist das Ausgangssignal groß, bei kleiner Steigung dementsprechend klein (**Abb. 5.8.4**). Bei der Messung betrug die 20-Hz-Amplitude 0,55 mm, die 80-Hz-Amplitude 0,23 mm. Für die vergleichende Rechnung wurde dieselbe Kennlinie zugrunde gelegt wie in Abb. 5.8.3, die Übereinstimmung ist akzeptabel (Abb. 8.5.4 rechts). Das Klirrfaktormodell passt folglich auch gut für die Beschreibung von Intermodulationsverzerrungen.

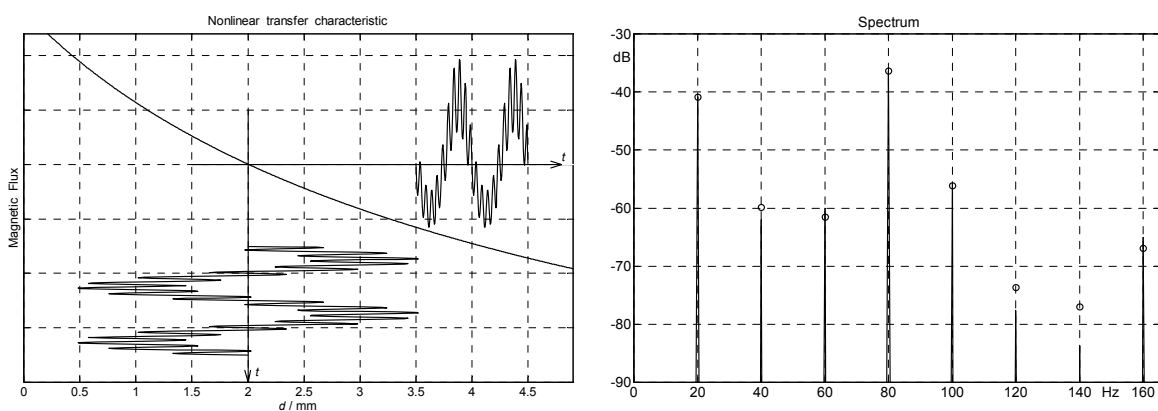


Abb. 5.8.4: Gekrümmte Übertragungskennlinie mit Zweitton-Aussteuerung (links). Das rechte Bild zeigt Messwerte (o) und ein hierzu berechnetes Schnelle-Spektrum, Kennlinie wie in Abb. 5.8.3. Der Kurvenverlauf des linken Bildes zeigt grundsätzliche Zusammenhänge, entspricht aber nicht den Daten des rechten Bildes.