4.9 Mathematische Feldtheorie

Ein Feld ist ein Raumgebiet, in dem eine physikalische Größe als Funktion von Raum und Zeit dargestellt wird. Die Mathematik unterstützt die analytische Feldbeschreibung durch Feld- und Vektoranalysis sowie durch Funktionen- und Abbildungstheorien. Die folgende Darstellung gibt einen kurzen Überblick über diese theoretischen Feldbeschreibugen; Detailinformationen können den Büchern von z.B. Bronstein, Papula, Smirnow, Heinhold/Gaede entnommen werden.

Die allgemeine Feldtheorie ist leistungsfähig, aber kompliziert. Unter Verzicht auf Allgemeingültigkeit sind jedoch Vereinfachungen möglich, wobei in vielen Fällen praktisch keine Genauigkeitseinbußen auftreten. Magnetische Felder breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit (300000 km/s) aus. Die für Tonabnehmer relevanten Distanzen von ca. 10 cm werden folglich in 0,3 ns durchlaufen. Oder anders ausgedrückt: Die **Einschwingzeiten** des Feldes sind viel kürzer als die für den Audiobereich charakteristischen Zeiten (µs – ms), weshalb die für den Aufbau des Feldes benötigte Zeit vernachlässigt wird. Man nimmt vereinfachend an, dass sich das Feld im ganzen betrachteten Bereich gleichzeitig (phasensynchron) ändert, dass also das Magnetfeld kein Gedächtnis besitzt, und dass der aktuelle Feldzustand nur von der aktuellen Erregung bewirkt wird, und nicht von Nachwirkungen der Vergangenheit. Derartige Felder werden als quasistatisch oder quasistationär bezeichnet. Ein **quasistatisches Feld** ist im Gleichgewichtszustand, wobei kein Energietransport und keine Energieumwandlung stattfindet. Ein **quasistationäres Feld** ist in einem zeitunabhängigen Beharrungszustand, bei dem Energietransport oder Energieumwandlung stattfindet. Die Vorsilbe *quasi* kommt daher, dass die zeitliche Ableitung $\partial/\partial t$ quasi null ist, also *so gut wie* null ist.

Das Magnetfeld wird durch die beiden vektoriellen Feldgrößen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ beschrieben. Ein Vektorfeld wird **konservativ** genannt, wenn im betrachteten Bereich die **Rotation null** ist; in diesem Fall hängt das Linienintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Integrationslinie ab, nicht vom Integrationsweg. Konservative Felder werden auch **Potentialfelder** genannt, weil sie ein **Skalarpotential** ψ besitzen; die vektorielle Feldgröße ist hierbei der Gradient des Skalarpotentials, weshalb auch von **Gradientenfeld** die Rede ist. Das Magnetfeld ist nur in den Bereichen konservativ, die keinen elektrischen Stromfluss enthalten; diese Bereiche müssen außerdem einfach zusammenhängend sein (Abb. 4.4). In der mathematischen Literatur wird ein Gradientenfeld häufig als $\vec{x} = \mathrm{grad}\,\psi$ geschrieben, mit $\vec{x}$ als vektorieller Feldgröße und ψ als Skalarpotential. Der Gradient (des Skalars ψ) ist ein Vektor, der in die Richtung der stärksten Feldzunahme zeigt. Beim Magnetfeld enthält die entsprechende Formel aber ein Minuszeichen: $\vec{H} = -\mathrm{grad}\,\psi$. Die Feldstärke $\vec{H}$ des Magnetfeldes zeigt in die Richtung der stärksten Potentialabnahme.

Der räumliche Verlauf der Feldvektoren (z.B. $\vec{H}$) kann durch **Feldlinien** dargestellt werden. Eine Kurve $C(x,y,z)$ ist dann eine Feldlinie, wenn der Feldvektor in jedem Kurvenpunkt ein Tangentenvektor ist: $dx/H_x = dy/H_y = dz/H_z$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt das räumliche Vektorfeld $\vec{H}(x,y,z)$. Die Feldlinien schneiden einander nicht, ausgenommen in solchen Punkten, in denen $\vec{H}$ nicht definiert ist oder null wird. Beim Magnetfeld kann es zweckmäßig sein, zwischen Feldlinien (aus $\vec{H}$ entstanden) und **Flusslinien** (aus $\vec{B}$ entstanden) zu unterscheiden; Flusslinien werden manchmal auch Stromlinien genannt. Die Literatur hat hier aber keine einheitliche Terminologie.

Die Flusslinien eines Magnetfeldes sind (in der Regel) geschlossene Kurven – ohne Anfang, ohne Ende. Daraus leitet sich der Begriff **quellenfreies Feld** ab. Natürlich ist ein ursächlicher Antrieb vorhanden, der aber nicht Ausgangspunkt für Fluss- bzw. Feldlinien ist. Mit den Mitteln der Vektoranalysis ausgedrückt bedeutet Quellenfreiheit, dass die **Divergenz null** ist. Ein derartiges Feld wird gelegentlich auch **solenoidales** Feld genannt. Nicht in jedem Magnetfeld gilt allerdings $\mathrm{div}\vec{H} = 0$; sofern Ferromagnetika enthalten sind, kann $\mathrm{div}\vec{H}$ wegen der feldstärkeabhängigen Permeabilität von null verschieden sein.

Der Begriff *Flusslinie* impliziert, dass irgend etwas fließt (strömt). **Der Fluss** (die Strömung) kann gegenständlich sein (z.B. Wasserkreis), oder abstrakt (z.B. Magnetfluss). Da gerade erläutert wurde, dass sich Feldänderungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, wäre die Vermutung naheliegend, die Strömungsgeschwindigkeit entspräche der Lichtgeschwindigkeit. Hierbei ist aber zu unterscheiden zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit und **Schnelle**. Wirft man einen Stein in ein Gewässer, so breitet sich eine kreisförmige Welle auf der Wasseroberfläche aus. Dies bedeutet aber nicht, dass sich nun alle Wassermoleküle mit dieser Geschwindigkeit radial nach außen bewegen. Die Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit ist viel größer als die Teilchen-Geschwindigkeit, die zur Unterscheidung *Schnelle* genannt wird. Wäre die Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich, so würde sich die gesamte Wasseroberfläche konphas heben und senken, ohne erkennbares Wellenmuster. Das zeitliche Differential jeder Partikelauslenkung ist die Schnelle – auch sie wäre über der ganzen Fläche konphas. Bei der Wasserströmung hat der Fluss die Dimension Volumen/Zeit, die flächenspezifische Flussdichte dementsprechend Länge/Zeit, was als Geschwindigkeit interpretierbar ist. Die Einheit des magnetischen Flusses ist Weber oder Voltsekunde, die Einheit der magnetischen Flussdichte ist T = Wb/m^2 = Vs/m^2. Hier macht es keinen Sinn, mit Gewalt die Einheit m/s suchen zu wollen. Vielmehr dürfen aufgrund isomorpher (strukturgleicher) Netzwerkgraphen und einander entsprechender Gleichungssysteme zwischen dem Magnetkreis und dem Wasserkreis (und weiteren Strömungskreisen) **Analogieschlüsse** hergestellt werden. Dabei muss klar sein, dass der magnetischen Flussdichte nicht die konstante Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht, sondern die signalabhängige Schnelle. Als letztes Analogiebeispiel sei das **Schallfeld** betrachtet: Die Schallgeschwindigkeit ist mit ca. 340 m/s eine Konstante. Die Schnelle, mit der sich die einzelnen Luftteilchen bewegen, ist – je nach Anregung – weitaus geringer. Aus der Schnelle, und nicht aus der Schallgeschwindigkeit, wird durch Multiplikation mit der Fläche der Schallfluss q gebildet.

Im Rahmen der eben erläuterten Analogiebetrachtungen kann $\vec{B}$ als vektorielles Strömungsfeld interpretiert werden, dessen **Flussintegral** den Fluss Φ ergibt:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \Phi_q = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Flussintegral über S

Das Flussintegral ist als Flächenintegral über die Fläche S zu bilden. Sofern es sich dabei um eine geschlossene Hüllfläche handelt, wie beim rechten Integral, gibt das Flussintegral den aus dieser Hüllfläche entspringenden Quellfluss an. Da die magnetischen Flusslinien keinen Anfang und kein Ende haben, ist klar, dass der aus einem durch S begrenzten Volumen kommenden Quellfluss null sein muss; das Feld ist quellenfrei. Lässt man nun die Hüllfläche S und das darin eingeschlossenen Volumen V gegen null gehen, so erhält man die Divergenz:

$$\mathrm{div}\vec{B} = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Divergenz

Die Divergenz wird auf Vektoren angewandt; ihr Ergebnis ist ein Skalar, der über die punktuelle **Quellstärke** Auskunft gibt. Vektorfelder, deren Divergenz null ist, werden **quellenfrei** genannt. Wenn man über eine vektorielle Feldgröße nicht das Flächenintegral, sondern das Linienintegral bildet, gelangt man zum **Zirkulationsintegral**:

$$W = \int_{s} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$ Arbeitsintegral längs der Strecke s

Wenn $\vec{F}$ eine Kraft ist, ergibt das Linienintegral hierüber die Arbeit (= Kraft · Weg). Im Gravitationsfeld hängt das Arbeitsintegral nur von Start- und Endpunkt ab, nicht vom dazwischenliegenden Weg. Wird das Zirkulationsintegral über einen geschlossenen Weg s berechnet (Startpunkt = Endpunkt), so ergibt sich im Gravitationsfeld der Wert null. Felder, bei denen dies der Fall ist, werden **wirbelfreie** Felder genannt. Analog zur Divergenz lässt sich der Wirbel (**die Rotation**) als Grenzübergang zu infinitesimal kleinem Umlaufweg darstellen:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \lim_{S \to 0} \left(\frac{1}{S} \oint_{s} \vec{H} \cdot d\vec{s} \right)$$ Rotation (Wirbel)

Hier ist anstelle der Kraft $\vec{F}$ die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ eingesetzt, die jedoch nicht grundsätzlich wirbelfrei ist, s ist der geschlossene Umlaufweg, S ist die von s umschlossene Fläche. Trotz möglicher Verwechslungen wird die Fläche hier nicht mit dem in der Mathematik üblichen Buchstaben A bezeichnet, weil A bzw. $\vec{A}$ das Vektorpotential bezeichnet.

Die folgenden Sätze der Feldtheorie werden ohne Herleitung angegeben, Näheres findet sich in der zitierten Mathematik-Literatur:

- Ein quellenfreies Vektorfeld lässt sich stets als Rotation eines <u>Vektor</u>potentials darstellen.
- Ein wirbelfreies Vektorfeld lässt sich stets als Gradient eines <u>Skalar</u>potentials darstellen.

Die in **Abb. 4.33** zusammengestellten Beziehungen erschließen sich am einfachsten, wenn man bei der Flussdichte beginnt. Weil es keinen magnetischen Monopol gibt, sind Magnetflüsse quellenfrei, die Divergenz ist null. Diese Aussage wird als 3. Maxwellsche Gleichung bezeichnet. Manchmal aber auch als 4. Maxwellsche Gleichung – die Physiker sind da uneins. Weil $\vec{B}$ quellenfrei ist, kann hierzu stets ein Vektorpotential $\vec{A}$ angegeben werden. Über die Permeabilität μ gelangt man von der Flussdichte $\vec{B}$ zur Feldstärke $\vec{H}$, deren Linienintegral die magnetische Spannung V ergibt, die über den magnetischen Leitwert Λ mit dem Fluss Φ zusammenhängt. Der Fluss ist das Flächenintegral über der Flussdichte $\vec{B}$. Integriert man die Feldstärke über eine geschlossene Kurve s, erhält man die Durchflutung Θ. Diese entspricht dem von s eingeschlossenen Strom I, der als Flächenintegral der Stromdichte $\vec{J}$ über der von s berandeten Fläche S darstellbar ist. Den Zusammenhang zwischen Feldstärke $\vec{H}$ und Stromdichte $\vec{J}$ beschreibt die 1. Maxwellsche Gleichung: Ihre integrale Form setzt Durchflutung und eingeschlossenen Strom gleich (Durchflutungsgesetz), ihre differentielle Form verknüpft Stromdichte und Rotation der Feldstärke. In stromfreien Feldbereichen ist die Rotation der Feldstärke null, die Feldstärke somit wirbelfrei, und deshalb als Gradientenfeld des Skalarpotentials ψ interpretierbar.

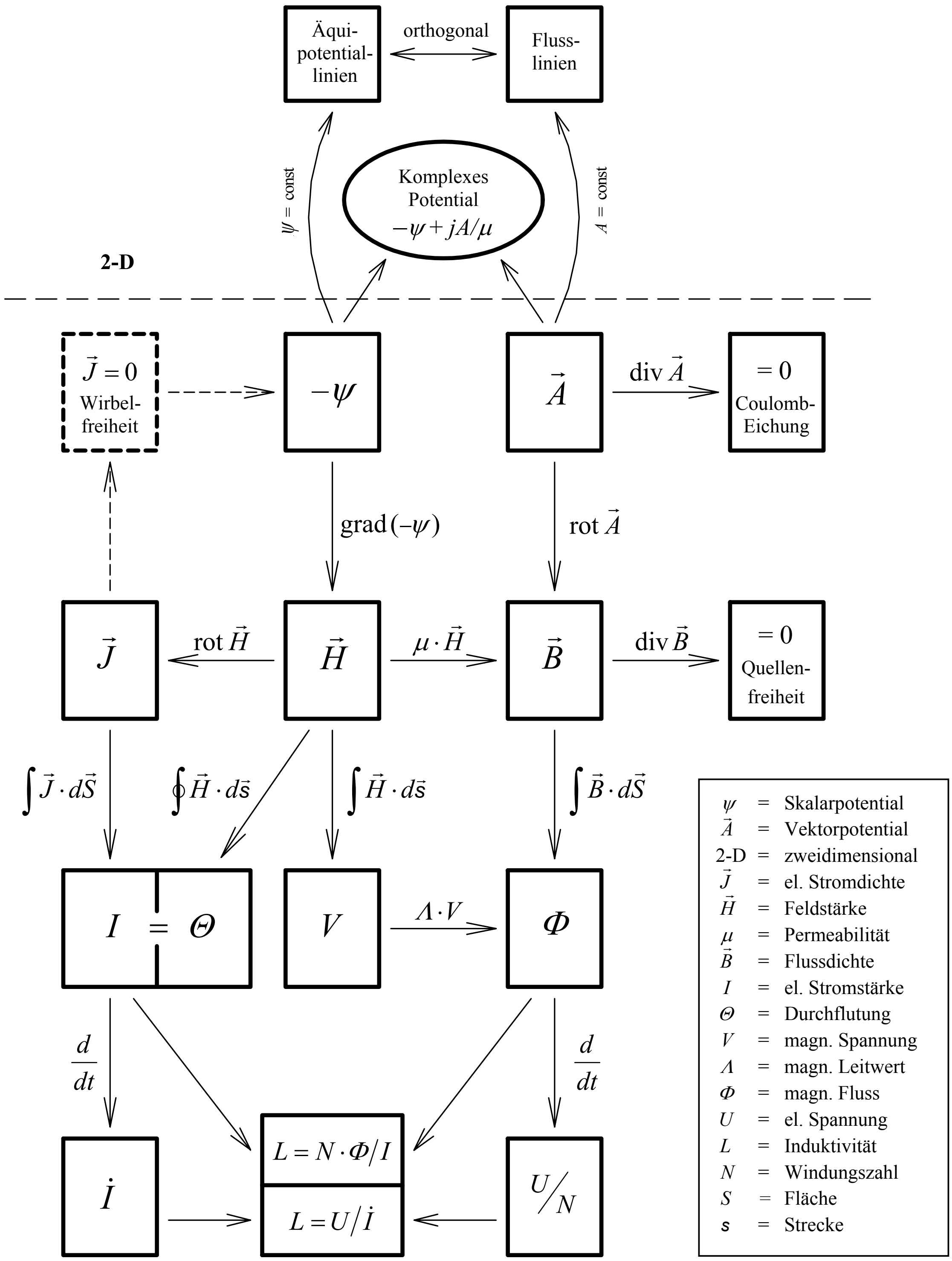

Abb. 4.33: Formale Zusammenhänge zwischen den magnetischen Feldgrößen. Das komplexe Potential ist nur für zweidimensionale Felder definiert. Das Skalarpotential ist nur im stromfreien Bereich definiert. Die Darstellung berücksichtigt keine Wellenausbreitungen.

Unter der Voraussetzung, dass μ konstant ist, d.h. nicht vom Ort abhängt, sind in stromfreien Feldbereichen sowohl $\vec{H}$ als auch $\vec{B}$ wirbel- und quellenfrei. Für das Skalarpotential gilt damit

$$\Delta\psi = \mathrm{div}\big(\mathrm{grad}(\psi)\big) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$ Laplace-Gleichung

Dies ist die (homogene) Laplace-Gleichung. Wendet man den Laplace-Operator Δ nicht auf das Skalarpotential, sondern auf das Vektorpotential an, so ergibt sich ebenfalls null:

$$\Delta\vec{A} = \mathrm{grad}\big(\mathrm{div}(\vec{A})\big) - \mathrm{rot}\big(\mathrm{rot}(\vec{A})\big) = 0\,; \qquad \mathrm{div}(\vec{A}) \overset{!}{=} 0$$ Coulomb-Eichung

Grundsätzlich bietet die Integration von $\vec{B}$ nach $\vec{A}$ eine optionelle Integrationskonstante; sie wird so gewählt, dass die Divergenz von $\vec{A}$ null ist (Coulomb-Eichung des Vektorpotentials). Damit gelten für jede Vektorkomponente von $\vec{A}$ die o.a. skalaren Laplace-Gleichungen:

$$\Delta A_x = 0, \qquad \Delta A_y = 0, \qquad \Delta A_z = 0.$$ vektorielle Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung ist eine sehr allgemeine, lineare homogene Differentialgleichung. Mit ihr sind Wirbel- und Quellenfreiheit in einer einzigen Formel darstellbar. In stromführenden Bereichen ist das Magnetfeld jedoch nur quellen-, aber nicht wirbelfrei, ein Skalarpotential folglich nicht existent. Hier verwendet man die (inhomogene) Poisson-Gleichung:

$$\Delta\vec{A} = -\mu\cdot\vec{J} \longrightarrow \mathrm{rot}\big(\mathrm{rot}(\vec{A})\big) = \mu\cdot\vec{J}\,.$$ Poisson-Gleichung

Sowohl die Laplace-, als auch die Poisson-Gleichung setzen örtlich konstantes μ voraus. In ferromagnetischen Materialien ist die Permeabilität aber feldstärkeabhängig, und da die Feldstärke i.Allg. ortsabhängig ist, ergibt sich eine ortsabhängige Permeabilität – Laplace- bzw. Poisson-Gleichung gelten dann nicht mehr uneingeschränkt.

Im **zweidimensionalen parallelebenen** Feld kann das **komplexe Potential** F gebildet werden. Die mathematische Literatur verwendet hierfür als Formelzeichen f oder F; beide Buchstaben sind problematisch, weil in der Elektrotechnik f für die Frequenz und F für die Kraft steht. Im Unterschied zu F wird deshalb im Folgenden F verwendet. Die Komponenten des komplexen Potentials sind **differenzierbare** komplexe Funktionen, die auch holomorph, analytisch oder **regulär** genannt werden. Reguläre Potentialfunktionen sind invariant gegenüber konformen Abbildungen, wodurch sich vereinfachte Darstellungs- und Berechnungsmöglichkeiten ergeben. Die Umströmung eines komplizierten Tragflächenprofils kann hierdurch auf zwei einfache Kreise abgebildet werden, das Magnetfeld um einen Zylinder kann als Überlagerung eines Parallelfeldes und eines Dipolfeldes abgebildet werden. Hierbei bleibt die Orthogonalität von Äquipotential- und Flusslinien erhalten, weil die konforme Abbildung winkeltreu ist. Man erkennt allerdings recht bald, dass Tonabnehmerfelder im Zweidimensionalen nicht ausreichend beschreibbar sind. Die Theorie des komplexen Potentials ist hierbei nur als Starthilfe brauchbar, um grundsätzliche Zusammenhänge zu erläutern. Mit Saite und Zylindermagnet stehen zwei Zylinderachsen aufeinander senkrecht; dies kann weder paralleleben, noch rotationssymmetrisch beschrieben werden. Vielmehr ist hierfür ein dreidimensionales Koordinatensystem erforderlich – und in diesem ist kein komplexes Potential definiert.

Die Ortsvariable des komplexen Potentials ist $z = x + jy$. Hierbei sind x bzw. y Abszisse bzw. Ordinate des zweidimensionalen Koordinatensystems. Das Skalarpotential ψ ist eine reguläre Potentialfunktion von z, die Gültigkeit der Laplace-DGL verweist auf Differenzierbarkeit und Ragularität. Das Skalarpotential wird nun als Realteil einer regulären komplexen Funktion F betrachtet, oder anders ausgedrückt: Die Realteilfunktion ψ wird durch einen Imaginärteil zu einer **analytischen Funktion** ergänzt. Dieser Imaginärteil ist durch ψ eindeutig vorgegeben, denn F soll ja nicht irgend eine komplexe Funktion werden, sondern eine reguläre (=analytische) Funktion. Bei regulären Funktionen gelten zwischen Realteil und Imaginärteil die Cauchy/Riemannschen Differentialgleichungen (**C/R-DGL**), und als deren Lösung kann zu jedem Realteil ein Imaginärteil berechnet werden. Wie bei jeder Integration ist hier eine additive Konstante frei wählbar; sie wird durch die Coulomb-Eichung festgelegt.

Ganz **eindeutig** ist die Definition des komplexen Potentials aber doch nicht: Man könnte ψ auch als Imaginärteil auffassen, zu dem der Realteil ergänzt wird, und auch die Vorzeichen sind beliebig zuweisbar. In allgemeiner Schreibweise ist das komplexe Potential:

$$F(z) = u(z) + jv(z)$$ komplexes Potential

Weil F im betrachteten Gebiet eine reguläre Funktion sein soll, müssen die C/R-DGL gelten:

$$\partial u / \partial x = \partial v / \partial y, \qquad \partial v / \partial x = -\partial u / \partial y$$ Cauchy/Riemann

Die **Mathematik** interpretiert u als Skalarpotential eines wirbelfreien Vektorfeldes, das sich als Gradient von u darstellen lässt. Der Gradient ist ein Vektor, der in die Richtung der größten Feldzunahme zeigt. Die **Physik** definiert das magnetische Skalarpotential ψ (wie auch das elektrische Skalarpotential φ) aber als Vektor in Richtung größter Feldabnahme. Es ist deshalb naheliegend, den Realteil von F mit einem Minuszeichen zu versehen:

$$F(z) = -\psi(z) + jv(z)$$ Vorzeichen fakultativ

Der Gradient des Realteils von F ist der Feldstärkevektor, dessen Komponenten mithilfe der C/R-DGL in den Imaginärteil des komplexen Potentials umgerechnet werden können:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\psi = \begin{pmatrix} -\partial\psi/\partial x \\ -\partial\psi/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial v/\partial y \\ -\partial v/\partial x \end{pmatrix}$$ ψ = Skalarpotential

Einen entsprechenden Zusammenhang findet man beim Vektorpotential, dessen Rotation die Flussdichte ergibt. Im Zweidimensionalen (und nur hier gelten die vorliegenden Darstellungen) hat das **Vektorpotential** nur eine Komponente $A = A_z$. Der Index z verweist hierbei auf die dritte Raumkoordinate des x-y-z-Systems; er darf nicht mit der komplexen Raumkoordinate $z = x + jy$ des zweidimensionalen Feldes verwechselt werden!

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \partial A/\partial y \\ -\partial A/\partial x \end{pmatrix}, \quad v = A/\mu, \quad \mu \neq \mu(z).$$ $\vec{A}$ = Vektorpotential

Damit folgt für das **komplexe Potential** des Magnetfeldes:

$$F(z) = -\psi(z) + jA(z)/\mu$$ komplexes Potential

Das komplexe Potential ist also aus dem Skalarpotential ψ und dem Vektorpotential $\vec{A}$ zusammengesetzt, die ihrerseits Funktionen der Feldstärke sind. Im **wirbelfreien** Magnetfeld ist die Rotation der Feldstärke null:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = 0 \longrightarrow \partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y = 0 \longrightarrow \partial H_y / \partial x = \partial H_x / \partial y$$

Dies ist die sog. *Integrierbarkeitsbedingung* eines ebenen Vektorfeldes, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals und für das vollständige Differential $d\psi$:

$$-d\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial x}dx - \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = H_x \cdot dx + H_y \cdot dy \qquad \text{vollständiges Differential}$$

Für $d\psi = 0$ erhält man Kurven konstanten Skalarpotentials ψ = const., sog. Äquipotentiallinien. Die Steigung *dy/dx* dieser Linien entspricht $-H_x / H_y$, d.h. die Äquipotentiallinien stehen senkrecht auf der Richtung des Feldstärkevektors.

Im **quellenfreien** Magnetfeld ist die Divergenz der Flussdichte null, und somit ist bei ortsunabhängigem μ auch die Divergenz der Feldstärke null:

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0 \longrightarrow \partial H_x / \partial x + \partial H_y / \partial y = 0 \qquad \text{für } \mu = const \text{, d.h. } \mu \neq \mu(z)$$

Das vollständige Differential *dA* des Vektorpotentials *A* ergibt sich daraus zu:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = -\mu H_y \cdot dx + \mu H_x \cdot dy \qquad \text{mit } \mu\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

Für $dA = 0$ erhält man Kurven gleichen Vektorpotentials (A = const), deren Steigung *dy/dx* der Steigung des Feldstärkevektors entspricht: $dy/dx = H_y / H_x$.

Die Kurven gleichen Vektorpotentials bilden somit das Richtungsfeld der Feldlinien, auf denen die Kurven gleichen Skalarpotentials (Äquipotentiallinien) senkrecht stehen.

Weil das komplexe Potential F als eine reguläre (analytische) Funktion definiert wurde, muss jede reguläre Abbildung von F wieder zu einer regulären Funktion in z führen. Die komplexe Ableitung *d/dz* ist so eine reguläre Abbildung (sie erfüllt die C/R-DGL); angewandt auf das komplexe Potential ergibt sich:

$$dF(z)/dz = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\{F\} - j\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{F\} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + j\frac{\partial \psi}{\partial y} = H_x - jH_y = H^*$$

Die Ableitung des komplexen Potentials entspricht der konjugiert komplexen Feldstärke, deren *x/y*-Komponenten als Real/Imaginärteil interpretiert werden. H^* ist ebenfalls eine reguläre Funktion von z. Das komplexe Integral über der konjugierten Feldstärke ist das komplexe Potential. Bei dieser Integration sind für ψ und A additive Konstanten frei wählbar; sie definieren den Nullpunkt von Skalar- und Vektorpotential.