4.7 Darstellung magnetischer Felder

Magnetfelder sind räumliche Vektorfelder. Oder, um etwas präziser zu sein: Magnetische Flussdichte $\vec{B}$ und magnetische Feldstärke $\vec{H}$ sind vektorielle Größen eines dreidimensionalen Feldes. In einer grafischen Darstellung müssten sowohl der Ort als auch die Feldgrößen dreidimensional dargestellt werden – unmöglich auf einem zweidimensionalen Papier. Mit perspektivischen Darstellungen lässt sich zwar eine räumliche Tiefe vortäuschen, Abstände und Winkel sind hierbei aber nur sehr schwer erfassbar. Deshalb erstellt man häufig Schnittebenen (oder in Sonderfällen gekrümmte Flächen), in denen der Feldverlauf gezeichnet wird. Besonders gut gelingt dies in parallelebenen oder rotationssymmetrischen Feldern. Bei einem parallelebenen Feld hängen die Feldgrößen nur von zwei Raumkoordinaten (x, y) ab. Das Feld eines stromdurchflossenen, unendlich langen, geraden Leiters (Abb. 4.1) gehört hierzu, wenn man die Leiterachse in z-Richtung dreht. Dasselbe Feld kann aber auch rotationssymmetrisch aufgefasst werden, mit der Leiterachse als Symmetrielinie, und Zylinderkoordinaten (r, φ) anstelle von kartesischen Koordinaten. Bleibt noch das Problem, die dreidimensionalen Feldgrößen in dieser Schnittebene darzustellen. Jeder Punkt der Darstellungsebene steht ja für einen Punkt der Schnittebene – damit bleibt eigentlich kein Platz mehr, um Betrag oder Richtung der Feldgröße einzuzeichnen. Also müssen Kompromisse gefunden werden, müssen weniger wichtige Informationen zugunsten wichtigerer unterdrückt werden. Beispielsweise kann man die Feldgröße nur an diskreten Punkten darstellen, und nicht in der gesamten (kontinuierlichen) Ebene. Oder man kodiert den Betrag der Feldgröße durch Farbzuordnung, und verzichtet auf die Darstellung der Richtung.

4.7.1 Feldstärke und Flussdichte

Die folgenden Felddarstellungen beziehen sich auf **zweidimensionale Felder**. Die Feldgröße wird als **Pfeil** dargestellt, dessen Länge den Betrag und dessen Richtung die Richtung der Feldgröße charakterisiert. Für den Betrag ist eine Skalierung erforderlich, z.B. 1 cm ≙ 1 T. Die durch einen Pfeil dargestellte Feldgröße wird seinem Fußpunkt zugeordnet. Dies kann sehr leicht zu Fehlinterpretationen führen, weil die Zeichenebene nun zwei Funktionen hat: Sie stellt die Ortskoordinaten dar, aber auch die Feldgröße. Der Betrachter ist versucht, zwischen Fußpunkt und Spitze des Pfeils einen örtlichen Zusammenhang herzustellen, obwohl nur der Fußpunkt einem Ort der Schnittebene zugeordnet ist. **Abb. 4.22** erläutert diese Problematik anhand von rotierenden Pfeilen:

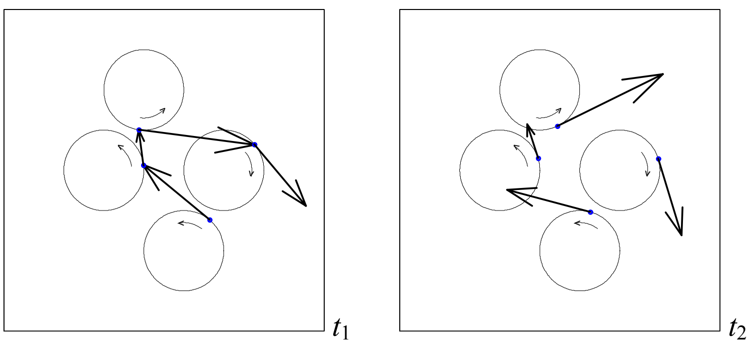

Abb. 4.22: Geschwindigkeitsvektoren, dargestellt zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_2 > t_1$. Im linken Bild ergibt sich ein geschlossener Polygonzug, der aber keine physikalische Bedeutung hat.

Das Gehirn verarbeitet optische Informationen zu visuellen Eindrücken. Die immense Datenmenge wird hierbei erheblich reduziert und nach **Gestalt**gesetzen strukturiert. So werden nahe benachbarte und ähnliche Objekte zu übergeordneten Einheiten zusammengefasst, wobei glatter Verlauf und Geschlossenheit anzustreben sind. Im linken Bild von Abb. 4.22 zeigen die Pfeilspitzen jeweils auf die Fußpunkte der benachbarten Pfeile. Der dadurch wahrgenommene geschlossene Linienzug ist aber irrelevant, wie das zu einem späteren Zeitpunkt dargestellte rechte Bild zeigt. In **Abb. 4.23** sind links oben Feldstärkevektoren eines Magnetfeldes dargestellt. Am Punkt [0.5 0.5] fließt ein elektrischer Strom in die Bildebene, was zu einem konzentrischen Feld führt. Alle Pfeile sind Tangenten einer konzentrischen Kreisschar, durch die großen Abstände im linken Bild fällt es aber schwer, diese Kreise zu identifizieren. Für das rechte obere Bild wurde der Leiter etwas nach rechts oben verschoben, wodurch ein Riesenpfeil entsteht. Das muss so sein, der Fußpunkt dieses Pfeils ist sehr nahe am Leiter, die Feldstärke ist hier tatsächlich sehr groß – aber sehr übersichtlich ist diese Darstellung nicht.

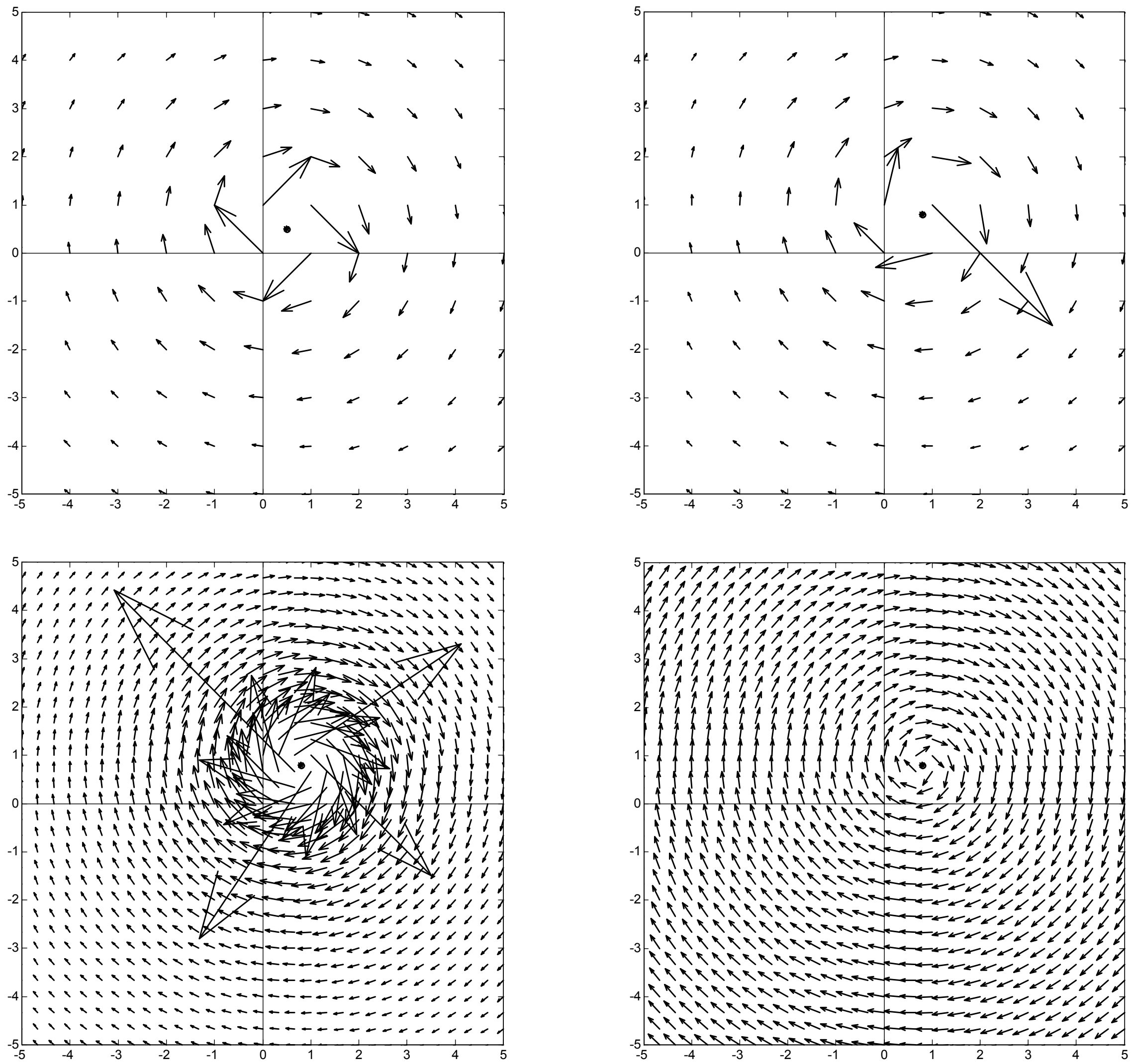

Abb. 4.23: Feldstärkevektoren um einen stromdurchflossenen Leiter.

Im Bild links unten wurde die Pfeildichte erhöht, um die Kreisformen feiner aufzulösen – auch keine gute Idee. Im rechten unteren Bild sind alle Pfeile mit gleicher Länge dargestellt; der visuelle Eindruck ist hier am besten, die Betragsinformation allerdings verloren gegangen.

Falls der Betrachter beim rechten unteren Bild von Abb. 4.23 zu der Auffassung gelangt, dieses Feld sei leicht im Uhrzeigersinn verdreht, weil an jedem Bildrand ein schräger Verlauf zu sehen ist, unterliegt er der eben erwähnten optischen Täuschung: Das Verbinden einzelner Pfeile zu zusammenhängenden Linien ist bei diesem Pfeilgitter physikalisch nicht sinnvoll. Im Übrigen kann ein rotationssymmetrisches Feld nicht verdreht sein!

In **Abb. 4.24** sind die Feldstärkevektoren einer Zweidrahtleitung dargestellt. Auch hier wird die Übersichtlichkeit ganz wesentlich verbessert, wenn auf die Betragsdarstellung verzichtet wird. Falls die Möglichkeit zum Farbausdruck besteht, kann die Betragsinformation als Pfeilfarbe dargestellt werden – bei einer Schwarzweißkopie ist hiervon aber nichts mehr zu sehen.

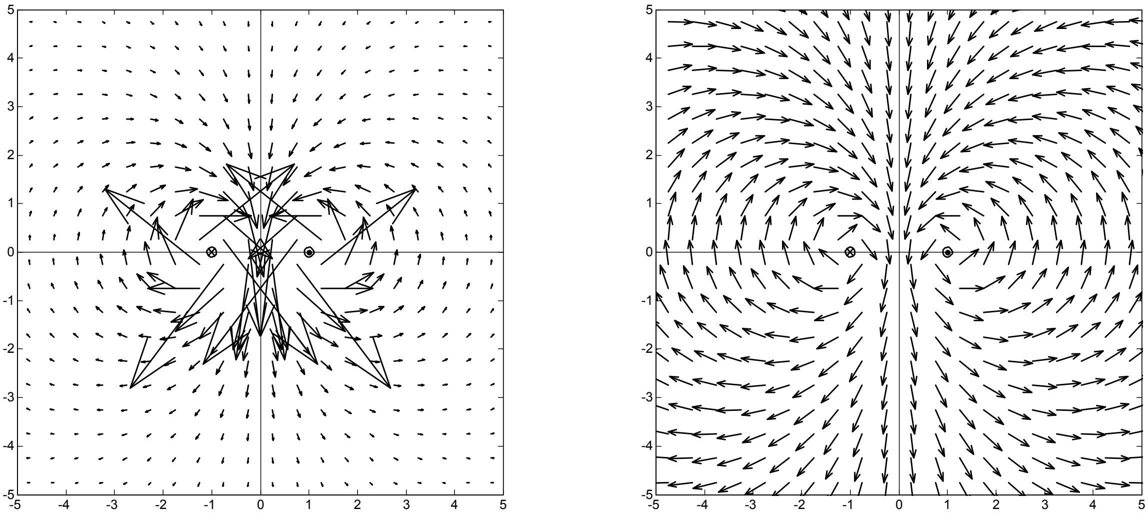

Abb. 4.24: Feldstärkevektoren einer stromdurchflossenen Zweidrahtleitung, rechts normierte Darstellung. Beim rechten Bild kann man Unsymmetrien zwischen unterer und oberer Bildhälfte erkennen, denen wieder die aus Abb. 4.23 bekannte Fehlinterpretation zugrunde liegt.

Ergänzend zur Vektordarstellung vermitteln **Feldlinienbilder** einen anschaulichen Eindruck vom räumlichen Feldverlauf. Feldlinien zeigen nicht die Orte gleicher Feldstärke – sie dürfen z.B. nicht mit den Isobaren einer Wetterkarte oder den Höhenlinien einer Landkarte verwechselt werden. Vielmehr wird eine Kurve dadurch zur Feldlinie, dass der Feldstärkevektor $\vec{H}$ in jedem Punkt dieser Kurve ein Tangentenvektor ist. In jedem Raumpunkt ist die Richtung, d.h. der räumliche Differentialquotient der Feldstärke, definiert. Geometrisch betrachtet bedeutet die Integration dieser räumlichen Differentialgleichung somit die Verbindung differentiell kleiner Richtungspfeile zu Integralkurven, d.h. zu Feldlinien (Kap. 4.1).

Die Feldlinien um einen stromdurchflossenen Leiter sind konzentrische Kreise. In diesem einfachen Fall gelingt ihre formal-analytische Beschreibung, bei komplizierteren realen Feldern ist zumeist eine FEM-Berechnung erforderlich. **Abb. 4.25** zeigt das konzentrische Feld: Für in die Bildebene hineinfließenden Strom verlaufen die Feldlinien im Uhrzeigersinn. Die Richtung des Feldstärkevektors ist als Tangente an die Feldlinien leicht bestimmbar, sein Betrag kann allerdings aus einer Feldlinie nicht ermittelt werden. Einen ungefähren Hinweis liefert jedoch der Feldlinien-Abstand: Je näher benachbart die Feldlinien, desto größer der Betrag. Im rechten Bild von Abb. 4.25 ist der Betrag als Grauwert dargestellt – mit mäßigem Erfolg. Bei linearer Zuordnung reicht die darstellbare Dynamik nicht aus, für die 1/r-Abnahme müsste eine spezielle Farbtafel (colormap) definiert werden.

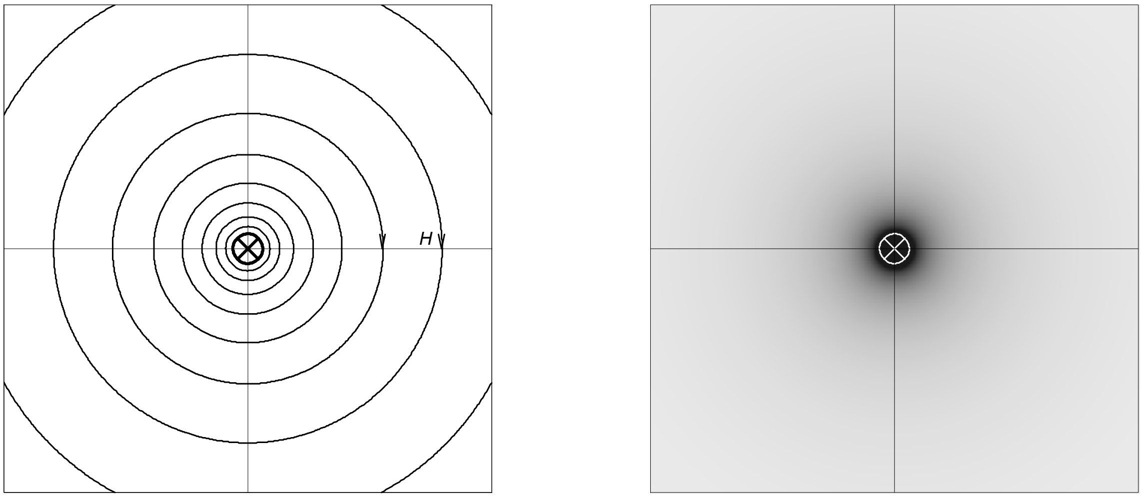

Abb. 4.25: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters. Links Feldlinien, rechts Grauwertkodierung. Die vom Drucker und Kopierer darstellbaren Grauwerte können die radiale Feldabnahme nicht fein genug auflösen.

Auch bei der unendlich langen Zweidrahtleitung ist eine analytische Feldbeschreibung möglich (**Abb. 4.26**). Bei entgegengesetztem Stromfluss sind die Feldlinien exzentrische Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Das konnte man schon bei der Pfeildarstellung (Abb. 4.24) vermuten, in der Liniendarstellung ist es offensichtlich. *Zwischen* den Drähten ist die Feldstärke am größten (= größte Liniendichte), mit wachsender Entfernung nimmt H schnell ab. Zur **Niveaulinien-Darstellung** gelangt man, wenn alle Orte gleichen Feldstärkebetrags durch Linien verbunden werden. Diese Darstellung ist von Landkarten bekannt: Eine Höhenlinie verbindet hier alle Punkte gleicher Höhe. Die Bezeichnung "Niveaulinie" besagt aber nur, dass alle Punkte mit gleichen Funktionswerten durch Linien verbunden werden; welche Größe dargestellt wird, muss angegeben werden. Auf *Isobaren* ist der Druck konstant, auf *Isothermen* die Temperatur, beim Magnetfeld könnte man *Iso-Feldstärke-Linie* sagen, das ist aber ungebräuchlich, deshalb: **Kurven gleicher Feldstärke**. Wenn Kurven gleicher Flussdichte darzustellen sind, wird manchmal von **Isofluxlinien** gesprochen.

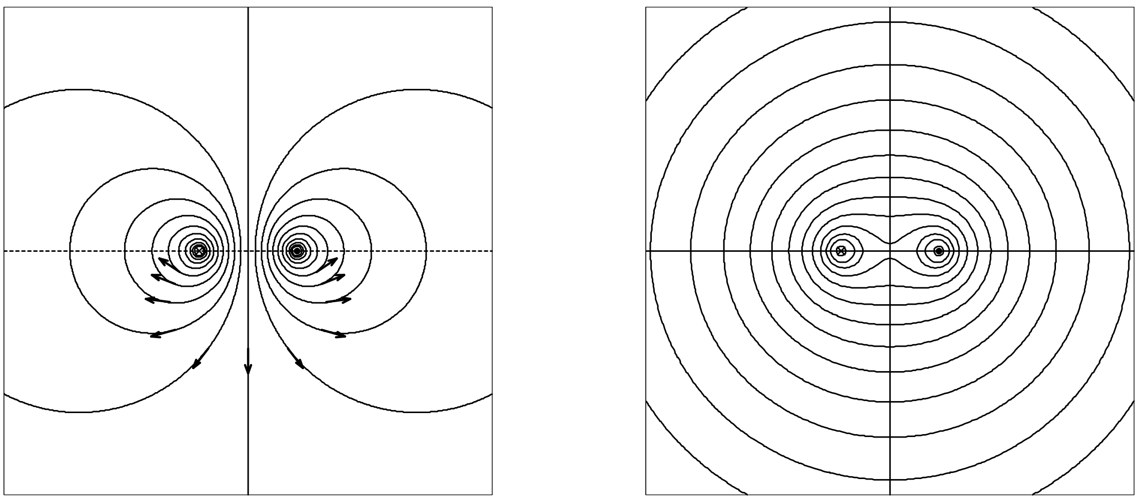

Abb. 4.26: Stromdurchflossene Zweidrahtleitung. Feldlinien mit Richtungspfeilen (links), Niveaulinien gleicher Feldstärke (rechts). Linien gleicher Feldstärke sind keine Äquipotentiallinien (→ Abb. 4.27).

4.7.2 Magnetische Potentiale

In Kap. 4.2 wurden das magnetische **Skalarpotential** und das magnetische Vektorpotential eingeführt. Der negative Gradient des Skalarpotentials ψ ist die Feldstärke: $\vec{H} = -\mathrm{grad}\,\psi$. Das Skalarpotential ist eine skalare Größe, die nur einen Betrag, aber keine Richtung hat. Insofern ist ihre Darstellung (und Berechnung) einfacher als die einer Vektorgröße. Aus der räumlichen Änderung des Skalarpotentials erhält man die Feldstärke, aus dem Linienintegral über der Feldstärke ergibt sich das Skalarpotential. Bei ganz einfachen Feldern, wie z.B. dem in Abb. 4.25 dargestellten Feld des stromdurchflossenen Leiters, ist die Feldstärke auf jeder der (kreisförmigen) Feldlinien konstant. Beim Umlauf mit konstanter Winkelgeschwindigkeit wächst ψ folglich proportional zum Winkel. Die Verbindungslinien gleicher Skalarpotentiale, die sog. **Äquipotentiallinien**, sind deshalb vom Leitermittelpunkt nach außen führende Strahlen. Längs einer Äquipotentiallinie ändert sich das Potential nicht, senkrecht dazu ändert es sich am stärksten – dies ist die Richtung, in die der Gradient zeigt. Oder anders ausgedrückt: Feldlinien und Äquipotentiallinien schneiden sich unter 90°, der Feldstärkevektor steht senkrecht auf der Äquipotentiallinie, sein Betrag entspricht der räumlichen Dichte der Äquipotentiallinien. In Bereichen, in denen die Äquipotentiallinien nahe benachbart verlaufen, ist die Feldstärke groß.

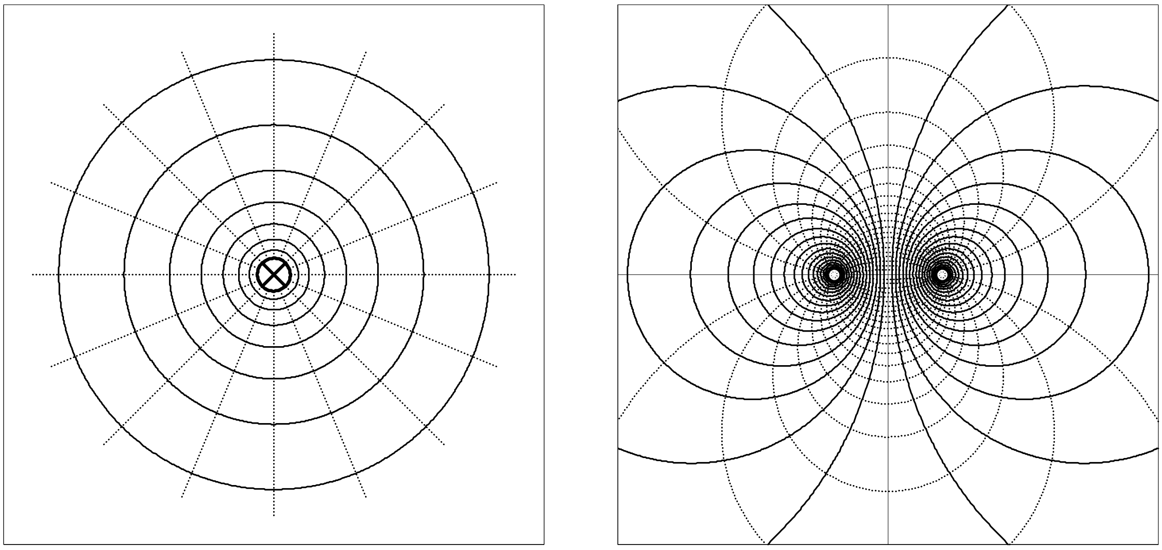

Abb. 4.27: Feldlinien und Äquipotentiallinien einfacher Felder: Einzeldraht (links); Zweidrahtleitung (rechts).

Der Begriff Äquipotentiallinie meint Kurven, auf denen das Skalarpotential gleich ist. Beim **Vektorpotential** $\vec{A}$ ist eine Gleichheit viel schwerer erreichbar, weil wegen dessen Vektorcharakter drei Komponenten gleich sein müssten. Das Vektorpotential eines zweidimensionalen Magnetfeldes hat hingegen nur eine Komponente, die auf der Feldebene senkrecht steht (Kap. 4.2); beim stromdurchflossenen Leiter verläuft diese somit parallel zur Leiterrichtung. Wenn man die Feldebene als *x/y*-Ebene definiert, hat das Vektorpotential nur eine A_z-Komponente, deren partielle räumliche Ableitung den Flussdichtevektor $\mu\vec{H}$ ergibt:

$$\mu \cdot \vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_z / \partial y \\ -\partial A_z / \partial x \end{pmatrix} \qquad \text{2D-Vektorpotential}$$

Beim **parallelebenen** Feld, das zweckmäßigerweise mit kartesischen Koordinaten dargestellt wird, lässt sich jedem Raumpunkt ein Flussdichtevektor $\vec{B}$ zuordnen. Seine beiden Komponenten sind:

$$B_x = \partial A / \partial y, \quad B_y = -\partial A / \partial x, \quad A = A_z \qquad A_z = \text{2D-Vektorpotential}$$

Die Richtung von $\vec{B}$ stimmt mit der Flusslinienrichtung überein, $\vec{B}$ ist Flusslinien-Tangente:

$$dy/dx = B_y / B_x \quad \rightarrow \quad B_x \cdot dy - B_y \cdot dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx = 0 \;\hat{=}\; dA$$

Die rechte Gleichung stellt ein totales Differential dA dar, das null ist. Das totale Differential kann man als Höhenzuwachs über der x/y-Ebene interpretieren, wenn eine Ortsveränderung um dx bzw. dy vorgenommen wird. Da dieser Höhenzuwachs für das 2D-Vektorpotential immer null ist, wenn – wie oben angenommen – in der x/y-Ebene auf einer Flusslinie vorangegangen wird, behält A seinen Wert hierbei unverändert bei. Zu Flusslinien gehören folglich konstante A-Werte, oder anders herum: Im zweidimensionalen parallelebenen Feld sind Orte konstanten Vektorpotentials durch Flusslinien verbunden. Zur Berechnung von Flusslinien (bzw. – nach Division durch μ – von Feldlinien) muss folglich das Vektorpotential ermittelt und Orte gleichen Vektorpotentials verbunden werden.

Beim **rotationssymmetrischen** Feld sind Zylinderkoordinaten zweckmäßiger als kartesische Koordinaten. Bei der Berechnung der Rotation erhält man dabei etwas andere Differentialgleichungen als beim parallelebenen Feld. Mit Radius r, Rotationswinkel φ und Achsenrichtung z ergibt die entsprechende Berechnung:

$$\frac{\partial(rA)}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial(rA)}{\partial r} = 0, \qquad A = A_\varphi \qquad A_\varphi = \text{2D-Vektorpotential}$$

Eine derartige Feldsymmetrie würde man z.B. bei einem ringförmigen Leiter ansetzen, das Vektorpotential verläuft dann ebenfalls ringförmig. Flusslinien sind dabei aber nicht Orte mit A = const, sondern gehören zu $r \cdot A$ = const.

4.7.3 Räumliche Felder

Alle realen Felder sind dreidimensional, und nur im Sonderfall entweder auf dünne Schichten begrenzt, oder (bei Symmetrie) durch eine Ebene charakterisiert. Bei einem allgemein-räumlichen Feldverlauf sind Feld- oder Flusslinienprojektionen auf eine zweidimensionale Ebene nicht hilfreich – die räumliche Tiefe kann hierbei in aller Regel nicht erkannt werden. Als Ausweg bleibt nur noch, Schnittebenen zu definieren, und in ihnen die Flussdichte oder die Feldstärke farblich kodiert darzustellen. Die Zuordnung zwischen dem darzustellenden Wert und der zugeordneten Farbe geschieht über Farbtafeln (colormaps), die z.B. einen Farbverlauf von blau über grün, gelb nach rot für ansteigende Funktionswerte zuweisen.