4.2 Die magnetischen Potentiale

Die in Kap. 4.1 definierte magnetische Feldstärke ist eine differentielle, längenspezifische Größe, ihr Linienintegral ergibt die magnetische Spannung. Diese kann sowohl als integrative Größe (entlang der Linie) interpretiert werden, als auch als Differenz der zum Anfangs- und Endpunkt der Linie gehörenden **Skalarpotentiale**. Das Potential soll die "magnetische Mächtigkeit" der Raumpunkte definieren, während die Feldstärke die räumliche Änderung dieser "Mächtigkeit" beschreibt. Das Wort Potential geht auf das lateinische 'potentia' zurück, das "Vermögen, Kraft, Macht, Einfluss" bedeutet. Auch bei anderen Feldern findet man eine Potentialdefinition, die z.B. beim Gravitationsfeld zum Begriff "potentielle Energie" geführt hat. Wenn man aber jedem Raumpunkt eine "absolute Mächtigkeit" im Sinne einer Relational-Skala zuordnen möchte, so stellt sich schnell die Frage nach dem **Nullpunkt** dieser Skala. Bei der Temperatur lässt sich über energetische Betrachtungen ein absoluter Nullpunkt definieren, beim Magnetfeld ist diese Normierung willkürlich. Das magnetische Skalarpotential ist streng genommen nicht durch eine Relationalskala, sondern durch eine **Intervallskala** bestimmt, der Nullpunkt wird nach Zweckmäßigkeit durch eine additive Konstante willkürlich definiert. Wenn die Feldstärke bzw. die magnetische Spannung als Potential*differenz* berechnet werden, fällt diese Konstante wieder heraus. Was zu der berechtigten Frage führt, warum man dann eine pseudo-absolute Größe (Potential) definiert, wenn man hinterher nur mit Differenzen (Intervallen) arbeitet. Die Begründung für dieses scheinbar widersinnige Vorgehen ist weniger in der Physik zu finden, als vielmehr in der Mathematik: Die Feld- und Potentialtheorie liefert auf der Basis der komplexen Funktionentheorie ein universelles Werkzeug zur Beschreibung aller Felder – unabhängig von deren individueller absoluter Skalierbarkeit.

Die Mathematik stellt mit dem **Skalarpotential** und mit dem **Vektorpotential** zwei abstrakte Größen zur Verfügung, deren physikalische Interpretation etwas Mühe bereitet. Zunächst soll gleich ein naheliegendes Missverständnis ausgeräumt werden: Obwohl das Magnetfeld ein Vektorfeld ist, hat es ein Vektorpotential und ein Skalarpotential. Das Vektorpotential ist eine jedem Raumpunkt zugeordnete Vektorgröße, das Skalarpotential ist eine jedem Raumpunkt zugeordnete Skalargröße; das Skalarpotential ist aber nicht der Betrag des Vektorpotentials.

Das **Skalarpotential** ψ ist die Größe, aus der durch Differenzbildung die magnetische Spannung V berechnet wird. Lässt man den Abstand zweier Punkte gegen null gehen, so konvergiert die auf diesen Abstand bezogene Potentialdifferenz gegen die Feldstärke $\vec{H}$. Der dabei zu berechnende räumliche Differentialquotient ist der **Gradient**:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\psi = -\begin{pmatrix} \partial\psi/\partial x \\ \partial\psi/\partial y \\ \partial\psi/\partial z \end{pmatrix}$$

Magnetische Feldstärke als Funktion des Skalarpotentials. Die Einheit des Skalarpotentials ist das Ampere.

Das Skalarpotential ψ ist (wie der Name sagt) ein Skalar, der Gradient ist ein Vektor. Er zeigt in die Richtung der stärksten Feld*zunahme*. Da die o.a. Formel ein Minuszeichen enthält, zeigt der Feldstärkevektor $\vec{H}$ folglich in die Richtung der stärksten Feld*abnahme* (*H*-Abnahme).

Der Gradient einer Konstanten ist null. Da die Gradientenbildung eine lineare Operation ist, ändert eine Offsetverschiebung nichts am Gradient. Deshalb hat die (willkürliche) Festsetzung des Potentialnullpunktes keinen Einfluss auf die Feldstärke: grad(ψ) = grad(ψ + const).

Es ist einfach, aus dem Skalarpotential durch Gradientenbildung (räumliche Differentiation) die Feldstärke zu berechnen. Soll umgekehrt aus der Feldstärke das Skalarpotential berechnet werden, ist hierfür ein Linienintegral zu bestimmen. Wie immer, erfordert eine Integration eine additive Konstante – diese legt gleichzeitig den absoluten Potential-Nullpunkt fest. In der folgenden Formel ist dieser Potentialnullpunkt dem Raumpunkt P_0 zugeordnet. Zwischen P und P_0 ist ein Linienintegral zu bilden:

$$\psi(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{P}^{P_0} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Skalarpotential als Funktion der magnetische Feldstärke. $\psi(P)$ ist das Skalarpotential am Punkt P. Am Punkt P_0 ist das Skalarpotential (willkürlich) zu null gesetzt.

Das **magnetische** Skalarpotential weist eine Besonderheit auf: Es ist nicht überall **definiert**, und falls definiert, ist es entweder unstetig, oder **vieldeutig**. In Raumbereichen, in denen eine elektrische Stromdichte $\vec{J} \neq 0$ zugelassen wird, kann kein Skalarpotential definiert werden. Innerhalb eines elektrischen Leiters gibt es kein Skalarpotential. Es ist hier nicht etwa null, sondern nicht definiert. Außerhalb eines Leiters (z.B. im Luftraum, der als Isolator angesehen wird), ist ein Skalarpotential definierbar. Wenn man an einem Punkt P_0 außerhalb eines geraden, stromdurchflossenen Leiters den Potentialbezugspunkt definiert [$\psi(P_0) = 0$], und entgegen der $\vec{H}$-Richtung den Leiter auf einer Kreisbahn umrundet, wächst das Potential auf positive Werte an. Nach einem vollen Umlauf kommt man wieder am Punkt P_0 an, das Potential entspricht hier der Umlaufspannung. Nach zweimaliger Umrundung entspricht es (am selben Punkt!) der doppelten Umlaufspannung. Das derart definierte Skalarpotential ist stetig, aber vieldeutig. Alternativ könnte man den Definitionsbereich auf einen vollen Umlauf begrenzen; das Skalarpotential wäre dann eindeutig, aber unstetig, denn an der Begrenzung ändert es seinen Wert sprunghaft.

Häufig entscheidet man sich für die zweite Methode, d.h. für ein eindeutiges, aber (räumlich) unstetiges Skalarpotential. Hierzu definiert man ein Gebiet (einen Bereich), das keinen elektrischen Strom führen darf (hier gilt $\vec{J} = 0$), und fügt Trennlinien ein, so dass dieses Gebiet "**einfach zusammenhängend**" wird. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet lässt sich *jede* geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen. In **Abb. 4.4** ist der Raum außerhalb des Leiters so ein Gebiet, wenn die Trennlinie als Gebietsgrenze eingefügt wird. Sie verhindert ein mehrfaches Umrunden des Leiters, erzeugt aber gleichzeitig eine Unstetigkeitsstelle (beim direkten Übergang von C nach A).

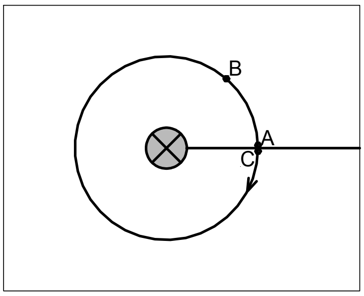


Abb. 4.4: Einfach zusammenhängendes Gebiet um einen stromdurchflossenen Leiter. Die nach rechts verlaufende Linie ist eine Gebiets-Begrenzungslinie. Das Skalarpotential wächst von A über B bis C. Der Pfeil gibt die Richtung des H-Vektors an.

Es mag als Nachteil empfunden werden, dass das Skalarpotential nur außerhalb eines Leiters definiert ist. Dem steht der Vorteil gegenüber, dass anstelle von drei Feldstärkekomponenten (H_x, H_y, H_z) ein (univariater) Skalar ψ zur Feldbeschreibung reicht.

Neben dem magnetischen Skalarpotential ist das **magnetische Vektorpotential** definiert; es ermöglicht Feldbeschreibungen sowohl außerhalb als auch innerhalb eines Leiters. Allerdings gehört das Vektorpotential nicht gerade zu den besonders anschaulichen Größen. Vielmehr leitet sich seine Existenzberechtigung aus formal-mathematischen Betrachtungen und darauf aufbauenden numerischen (FEM-) Feldberechnungen ab (Potential- und Feldtheorie, 4.9). Beispielsweise sind mit der FEM-Software "ANSYS" zweidimensionale Felder nur mit dem Vektorpotential berechenbar, nicht mit dem Skalarpotential. Das **Vektorpotential** $\vec{A}$ hängt über eine spezielle räumliche Differentiation, die Rotation, von der Feldstärke $\vec{H}$ ab:

$$\mu \cdot \vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$ Vektorpotential[§] $\vec{A}$

μ ist hierbei eine Materialkonstante, die sog. Permeabilität (siehe Kap. 4.3). In kartesischen Koordinaten berechnet sich die **Rotation**, die auch mithilfe des Nablaoperators ∇ dargestellt wird, als Differenz partieller Differentiale:

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_z/\partial y \; - \; \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z \; - \; \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x \; - \; \partial A_x/\partial y \end{pmatrix}$$

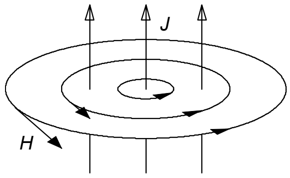
Rotation in kartesischen Koordinaten.
Die Einheit des Vektorpotentials[§] ist Vs/m.

Bei Magnetfeldern, die **zweidimensional** dargestellt werden können (z.B. parallelebene Felder), hat das Vektorpotential nur eine Komponente; die anderen beiden sind null. Beispielsweise ist bei einem in der *xy*-Ebene definiertem *H*-Feld die H_z-Komponente null; in dem zugehörigen Vektorpotential ist nur A_z von null verschieden. Das ist die Potentialkomponente, die auf der *xy*-Ebene senkrecht steht.

Abb. 4.4 stellt so ein parallelebenes Feld dar. Der Strom fließt in die Zeichenebene hinein, in der *xy*-Ebene entsteht ein *H*-Feld. Das Vektorpotential hat nur eine A_z-Komponente, die parallel zum Stromfluss liegt. Die o.a. Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\mu \cdot \vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} +\partial A_z/\partial y \\ -\partial A_z/\partial x \end{pmatrix}$$ 2D-Vektorpotential

Mit dem Vektorpotential schafft man eine elegante Möglichkeit, Randbedingungen zu definieren. Dies ist z.B. bei FEM-Berechnungen erforderlich, um Rechnungen zu vereinfachen bzw. eigentlich unendliche Bereiche zu begrenzen. Auch die Definition von Feldlinien ist mit dem Vektorpotential relativ einfach (Kap. 4.7). In **Abb. 4.5** ist der vektorielle räumliche Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke bzw. Flussdichte und Vektorpotential dargestellt.



$$rot\;\vec{H} = \vec{J}$$

$$rot\;\vec{A} = \vec{B}$$

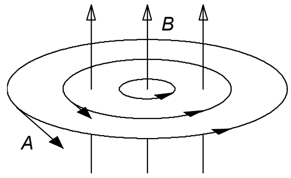


Abb. 4.5: Räumliche Zuordnung zwischen $\vec{J}$ und $\vec{H}$ (links) bzw. $\vec{B}$ und $\vec{A}$ (rechts).

§ Der Buchstabe $\vec{A}$ darf nicht mit einem Flächenvektor verwechselt werden!