4.1 Grundlagen der Magnetostatik

Die folgenden Betrachtungen beginnen mit einem Elektromagnet, weil bei ihm die Kausalität zwischen felderzeugendem Strom und erzeugtem magnetischem Feld gut ersichtlich ist. Für Tonabnehmer spielen Elektromagnete zwar keine Rolle, die mit ihnen gewonnenen Erkenntnisse lassen sich aber leicht auf die in Tonabnehmern verwendeten Dauermagnete übertragen.

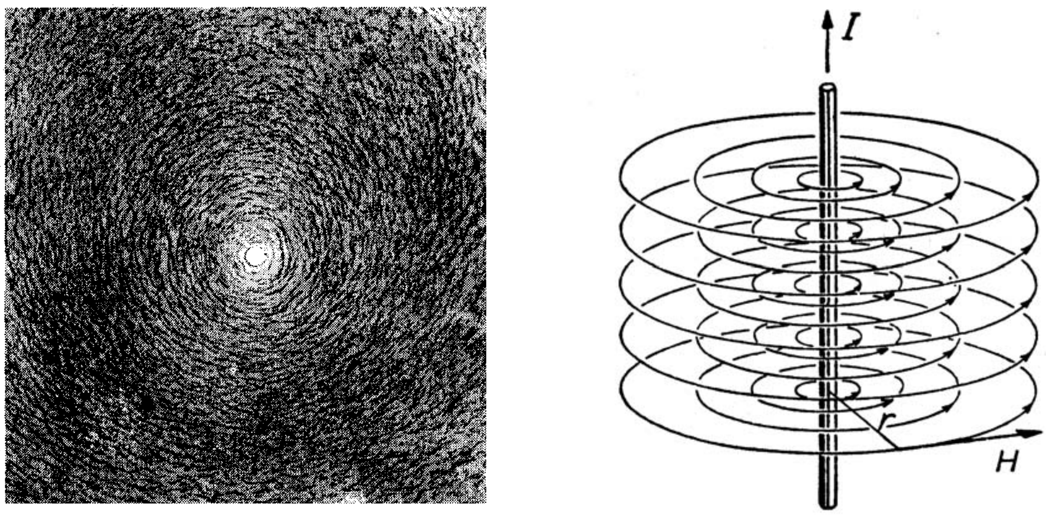


Abb. 4.1: Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter. Eisenfeilspäne (links), Feldlinien (rechts); [18, 19].

Wenn ein elektrischer Gleichstrom I durch einen sehr langen, geraden Draht fließt, entsteht um ihn herum ein zirkulares, ringförmiges Magnetfeld. Dessen Wirkung sieht man, wenn längliche Eisenfeilspäne in den umgebenden Raum gebracht werden: Sie ordnen sich zu Kreisbahnen, die konzentrisch um den Draht verlaufen (**Abb. 4.1**). Die Kreisbahnen sind in diesem Versuch zwar nicht perfekt ausgeprägt, aber für das Auge doch gut erkennbar. Mit den Eisenfeilspänen hatte man ein Mittel gefunden, das eigentlich unsichtbare Magnetfeld sichtbar zu machen. Die von den Eisenfeilspänen angezeigten (in diesem Beispiel kreisförmigen) Linien nannte man **Feldlinien**. Natürlich existiert das Magnetfeld nicht nur in den Feldlinien; es erfüllt den ganzen Raum. Die Liniendarstellung ist eine diskrete Visualisierung einer räumlich verteilten (kontinuierlichen) Vektorgröße.

Dass kreisförmige Strukturen entstehen, hat zwei Ursachen: Die länglichen Späne werden durch das Magnetfeld in eine tangentiale Richtung gedreht (normal zum Ortsvektor), und sie verbinden sich zu Gruppen, wobei die einzelnen Späne an ihren Enden zusammenhängen. Eisenfeilspäne sind ein gutes Mittel, um die Wirkungen des unsichtbaren Magnetfeldes zu veranschaulichen, exakte quantitative Feldbeschreibungen sind hiermit aber nicht möglich. Die empirisch gewonnene Kreisform ist jedoch die Grundlage für eine abstrakte, analytische Feldbeschreibung. Hierbei wird angenommen, dass der im Draht fließende elektrische Strom im ganzen Raum eine vektorielle Feldgröße erzeugt; diese wird **magnetische Feldstärke** $\vec{H}$ genannt. Wenn keine Verwechslung mit der elektrischen Feldstärke möglich ist, wird 'magnetisch' auch gerne weggelassen, und nur von der Feldstärke $\vec{H}$ gesprochen.

Bei dem im Beispiel (langer Draht) angenommenen Stromfluss zeigt der Feldstärke-Vektor in *Richtung* der Feldlinien, also tangential zum Kreis bzw. normal zum Ortsvektor. Der *Betrag* des Feldstärke-Vektors nimmt mit einer $1/r$-Funktion über der Entfernung ab. Vor seiner genauen Berechnung sollen zunächst erst die Bezugssysteme eingeführt werden.

Das magnetische Feld ist ein **Vektorfeld**, die beschreibende Feldgröße $\vec{H}$ hat einen Betrag und eine Richtung. Nicht jedes Feld hat Vektorcharakter: Eine räumliche Temperaturverteilung wird beispielsweise durch ein **Skalarfeld** beschrieben, d.h. durch eine Größe, die nur einen Betrag, aber keine Richtung hat. Die **Richtung** eines Vektors gibt man als Winkelabweichung zu einer **Bezugsrichtung** an. In einer zweidimensionalen Darstellung eignen sich **Polarkoordinaten** besonders gut zur Richtungsangabe. Die Richtung eines vom Koordinatenursprung ausgehenden Strahls wird auf die Abszissenrichtung bezogen, wobei Winkelabweichungen im Gegenuhrzeigersinn positiv zählen. Ähnlich sind im dreidimensionalen Raum Kugelkoordinaten definiert. Dass man sich auf den Gegenuhrzeigersinn festgelegt hat, passt zu anderen Vereinbarungen (kartesische Koordinaten, komplexe *e*-Funktion, Euler), ist aber letzten Endes willkürlich – man hätte auch im Uhrzeigersinn positiv zählen können. Wenn aber einmal ein **Richtungssinn** definiert ist, muss er für folgende Betrachtungen beibehalten werden. Die Richtung eines Magnetfeldes, d.h. die Richtung des Feldstärke-Vektors, ist in jedem Raumpunkt durch die Tangente an die (durch diesen Punkt verlaufende) Feldlinie gegeben. Eine Tangente ist aber eine Gerade und kein Strahl, folglich sind auch hierbei zwei (zueinander um 180° gedrehte) Bezugsrichtungen definierbar.

Der heute für Magnetfelder geltende Richtungssinn ist historisch begründet; er leitet sich von der Kompassnadel ab. Die **Erde** ist ein riesiger Dauermagnet, der zwischen dem geografischen Nord- und Südpol ein schwaches Magnetfeld erzeugt. Hängt man eine Kompassnadel (einen kleinen, stabförmigen Dauermagnet) frei beweglich auf, so drehen ihn die Magnetfeldkräfte parallel zu den Feldlinien. Der Teil der Kompassnadel, der zum geografischen Nordpol zeigt, wurde **magnetischer Nordpol** der Kompassnadel genannt, und gleichzeitig wurde willkürlich festgelegt, dass aus diesem magnetischen Nordpol die Feldlinien heraustreten. Daraus ergibt sich aber, dass der geografische Nordpol[§] ein magnetischer Südpol sein muss! Im Folgenden ist mit Nordpol immer der magnetische Nordpol gemeint. Für die Beziehungen zwischen Strom- und Magnetfeldrichtung müssen wieder Richtungsvereinbarungen getroffen werden. In metallischen Leitern bedeutet Stromfluss die Verschiebung freier Elektronen (elektrischer Strom = Ladungsverschiebung pro Zeit). Die Richtung entgegen der Elektronenbewegung ist die **technische Stromrichtung** (im Verbraucher von Plus nach Minus). In grafischen Darstellungen definiert man zumeist diese technische Stromrichtung mit einem **Richtungspfeil**. Den Zusammenhang zwischen der o.a. Strom- und Magnetfeldrichtung kann man sich jederzeit mit der **rechten Hand** veranschaulichen: Hält man den Daumen in die technische Stromrichtung, dann zeigen die restlichen (gekrümmten) Finger den zirkularen Umlaufsinn des Magnetfeldes an.

Die Feldlinien um einen unendlich langen, geraden Leiter sind konzentrische Kreise, deren Mittelpunkt auf der Leiterachse liegt. Man bezeichnet ein derartiges Feld als **paralleleben**, weil in allen zueinander parallelen Ebenen dasselbe kreisförmige Feldlinienmuster entsteht. Seine Berechnung bereitet aufgrund der einfachen Struktur keine Probleme, es hat aber einen Nachteil: Es existiert nicht in der Realität, weil kein unendlich langer Leiter existiert. Reale Felder haben wesentlich kompliziertere Strukturen, sie lassen sich nur als (zumeist recht grobe) Näherung beschreiben. Finitisierungs-Programme, die das Feld in viele kleine Teilbereiche aufteilen (finite element modeling, FEM), bieten zwar einen Lösungsansatz, kommen aber bei den in und um Tonabnehmern herrschenden Feldern schnell an ihre Grenzen. Die folgenden Kapitel stellen die grundsätzlichen Zusammenhänge zunächst in idealisierter Form dar. Auf die für Tonabnehmer geltenden Besonderheiten wird am Ende eingegangen.

[§] Zwischen dem geografischen Nordpol und dem magnetischen Südpol der Erde liegen ca. 1400 km. In Mitteleuropa sind die Erdfeldlinien ca. 65° gegenüber der Erdoberfläche geneigt. Flussdichte-Betrag ca. 45 µT.

Das von einem einzelnen stromdurchflossenen Draht erzeugte Magnetfeld ist relativ schwach. Erst wenn man den Draht zu einer Spule aufwickelt, entsteht durch die Überlagerung (Addition) der Einzelfelder ein starkes Feld. Das Überlagerungsprinzip wird in **Abb. 4.2** deutlich: Hier sind zwei parallele Drähte gezeichnet, in denen ein *betragsmäßig* gleich großer Strom fließt; die Strom*richtung* ist aber in den beiden Drähten entgegengesetzt. Wie üblich erfolgt der *technische* Stromfluss von Plus nach Minus, im Schnittbild wird ein vom Betrachter in die Bildebene hineinfließender Strom mit einem Kreuz ⊗ dargestellt; den entgegengesetzten Stromfluss (aus der Bildebene heraus) symbolisiert ein Kreis mit einem Punkt ⊙.

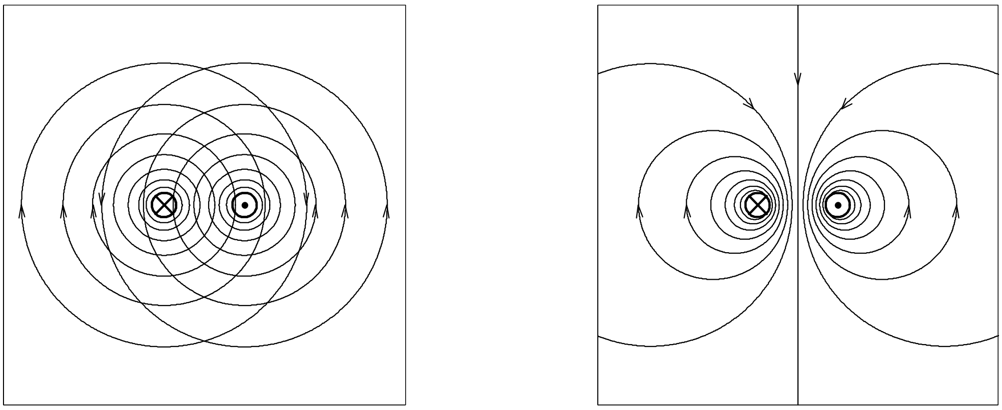


Abb. 4.2: Magnetfeld zweier paralleler Drähte; antiparallele Stromrichtung. Einzelfelder (links), Summe (rechts)

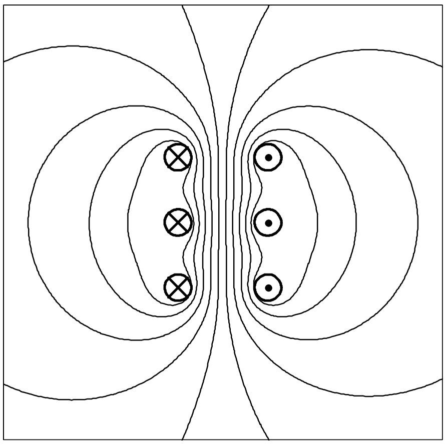
Jeder Draht erzeugt ein kreisförmiges Magnetfeld, das sich im Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Für die bei Tonabnehmern betrachteten kleinen Abmessungen (< 10cm) und niedrigen Frequenzen (< 20kHz) sind ausbreitungsbedingte Verzögerungen völlig unbedeutend, so dass ein quasistationäres Feld angenommen werden kann (keine elektromagnetischen Wellengleichungen). An jedem Raumpunkt sind die von beiden Drähten stammenden Magnetfelder vektoriell zu addieren, woraus sich die dargestellte exzentrische Kreisschar ergibt. Anstelle von "Überlagern der Magnetfelder" kann natürlich auch von "vektorieller Addition" der von den beiden Drähten hervorgerufenen Feldstärken gesprochen werden. Diese Überlagerung ist aber nur zulässig, solange es sich um ein **lineares System** handelt. Luft als felderfüllter Raum ist linear, Eisen ist nichtlinear. Zunächst werden linearen Systeme betrachtet.

Das einen stromführenden Leiter umgebende Magnetfeld weist einige Eigenschaften auf, die man intuitiv sofort versteht: Es ist proportional zum Strom, es nimmt mit wachsender Entfernung ab, und es ist rotationssymmetrisch um den Leiter angeordnet. Formal berechnet sich der Betrag des Feldstärke-Vektors am Messpunkt zu:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$ magnetische Feldstärke außerhalb eines geraden Leiters

Hierbei ist H der Betrag der Feldstärke, I ist die Stromstärke, und r ist der kürzeste Abstand des Messpunktes von der Leiterachse. Die Formel gilt nur für den Raum außerhalb eines unendlich langen, geraden Leiters. Es sei nochmals betont, dass bei zwei Leitern (Abb. 4.2) nicht die Beträge der beiden Feldstärken aufaddiert werden dürfen; vielmehr sind die Feldstärken *vektoriell* zu addieren. Stehen beispielsweise zwei betragsmäßig gleich große Feldstärke-Vektoren senkrecht aufeinander, so ist der Betrag der resultierenden Gesamtfeldstärke nicht doppelt so groß, sondern nur $\sqrt{2}$ mal so groß.

Der Betrag der magnetischen Feldstärke lässt sich vergrößern, wenn entweder die Stromstärke erhöht wird, oder wenn mehrere Drähte zusammenarbeiten. In **Abb. 4.3** sind 6 stromführende parallele Drähte dargestellt. Man erkennt sehr schön, wie die Feldlinien zwischen den Drähten zu einem Kanal fokussiert werden. Ein ähnliches (aber nicht identisches) Bild ergibt sich, wenn *ein* Draht in drei schraubenförmigen Windungen aufgewickelt wird.



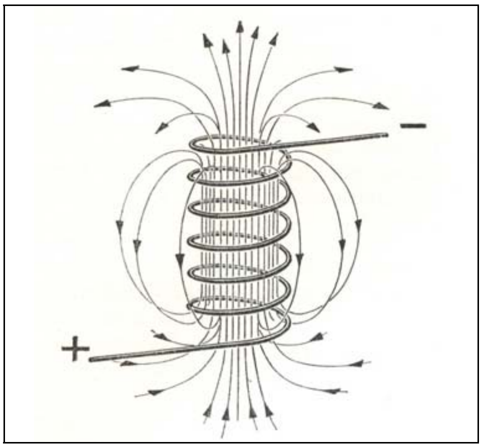


Abb. 4.3: Schnitt durch das räumliche Magnetfeld von 6 stromdurchflossenen, parallelen Drähten (links). Räumliches Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule [19].

In den Abb. 4.2 und 4.3 dienen Feldlinien zur Visualisierung des unsichtbaren Magnetfeldes. Die Tangente an die im dreidimensionalen Raum verlaufende **Feldlinie** gibt die *Richtung* der Feldstärke an, der Abstand der gezeichneten Feldlinien zueinander beschreibt den *Betrag* der Feldstärke. Je enger in einem Bereich die Feldlinien gezeichnet sind, desto stärker ist hier das Magnetfeld. Hierbei ist ein Skalierungsfaktor frei wählbar: Ob eine Feldstärke von z.B. 500 A/m mit einem Feldlinienabstand von 5 mm oder 1 mm gezeichnet wird, hängt von der Übersichtlichkeit der insgesamt zu zeichnenden Feldverteilung ab. Das reale Magnetfeld verläuft natürlich nicht nur in den gezeichneten Feldlinien, sondern kontinuierlich verteilt im gesamten Raum.

Feldlinien zeigen nicht die Orte gleicher Feldstärke – sie dürfen nicht mit z.B. den Isobaren einer Wetterkarte oder den Höhenlinien einer Landkarte verwechselt werden. Vielmehr wird eine Kurve dadurch zur Feldlinie, dass der Feldstärkevektor $\vec{H}$ in jedem Punkt dieser Kurve ein Tangentenvektor ist. In jedem Raumpunkt ist (über den räumlichen Differentialquotient des Feldstärkevektors) die Feld*richtung* definiert. Geometrisch betrachtet bedeutet die Integration dieser räumlichen Differentialgleichung somit die Verbindung differentiell kleiner Richtungspfeile zu Integralkurven, d.h. zu Feldlinien.

Nur in ganz einfachen Fällen wie z.B. in Abb. 4.1 sind Feldlinien zugleich Kurven gleichen Feldstärkebetrags. Im allgemeinen Fall ändert sich der Betrag der Feldstärke im Verlauf der Feldlinie. Da die Feldstärke eine längenspezifische Größe ist (ihre Einheit ist A/m), liegt es nahe, das Linienintegral über $\vec{H}$ zu untersuchen. Bei einem Linienintegral folgt man z.B. einer Feldlinie, und integriert gleichzeitig das Produkt aus Feldstärkebetrag H und differentieller Linienlänge *ds*. Auf einer Feldlinie ist die Feldstärke ein Tangentenvektor zur Feldlinie, deshalb verläuft hierbei $\vec{H}$ immer parallel zu *ds*. In Analogie zum elektrischen Feld nennt man die durch dieses Linienintegral berechnete Größe **"magnetische Spannung V"**. Bildet man das Linienintegral nicht entlang einer Feldlinie, sondern auf irgend einer allgemeinen Raumkurve, dann ist das **Skalarprodukt** von $\vec{H}$ und $d\vec{s}$ zu integrieren.

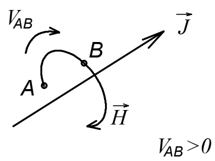
Magnetische Feldlinien haben im Unterschied zu elektrischen Feldlinien keinen Anfang und kein Ende. In den meisten Fällen bilden sie ringförmig geschlossene Linien, es gibt aber auch unendlich lange, komplizierte Raumkurven. Wenn man das Linienintegral über einen vollständigen Umlauf entlang einer geschlossenen Feldlinie berechnet, das sog. **Umlaufintegral**, erhält man die **magnetische Umlaufspannung**. Sie entspricht dem von der betrachteten Feldlinie eingeschlossenen Strom, also der Ursache des magnetischen Feldes. Ganz einfach ist dieser Zusammenhang bei Abb. 4.1: In dem unendlich langen, geraden Draht fließt der Strom I, im Abstand r beträgt die Feldstärke $H = I\ /\ (2\pi r)$, das Umlaufintegral längs des Kreisumfanges mit Radius r ergibt I.

Auch wenn das Umlaufintegral nicht entlang einer Feldlinie gebildet wird, sondern entlang irgend einer *geschlossenen* Raumkurve, entspricht sein Wert dem eingeschlossenen Strom. Da in diesem Fall der Feldstärkevektor aber nicht mehr zwangsläufig dieselbe Richtung wie die Raumkurve hat, ist wieder das Skalarprodukt zu bilden. Der durch die von der Raumkurve berandeten Fläche hindurchtretende Strom ergibt sich im allgemeinen Fall als Flächenintegral über die **Stromdichte** $\vec{J}$. Dieses Flächenintegral wird **Durchflutung** Θ genannt. Hiermit lässt sich eine Verknüpfung herstellen zwischen der elektrischen Ursache $\vec{J}$ des Feldes, und der magnetischen Wirkung $\vec{H}$:

$$\Theta = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} \qquad \text{Durchflutungsgesetz}$$

In dieser Gleichung ist $\vec{J}$ die vektorielle Stromdichte[§] (Ampere pro Quadratmeter), $\vec{H}$ ist die vektorielle magnetische Feldstärke (Ampere pro Meter). Durchflutet wird eine Fläche S, die von der Randkurve s begrenzt wird. $d\vec{s}$ ist ein infinitesimal kleines Längenelement dieser Randkurve, $d\vec{S}$ ist eine infinitesimal kleine Teilfläche der von s berandeten Gesamtfläche. Die Teilfläche ist als Vektor angegeben: Der *Betrag* dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt, seine *Richtung* steht senkrecht auf der Teilfläche. Bei dem Produkt der Vektoren handelt es sich um das **Skalarprodukt**, das als Produkt der Vektor*beträge* definiert ist, multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Der Kreis im Integralzeichen besagt, dass längs der *geschlossenen* Kurve s zu integrieren ist, dass also das *Umlauf*integral zu bilden ist. Wird das Linienintegral nicht über einen vollständigen Umlauf gebildet, sondern nur über eine Strecke zwischen den Punkten A und B, erhält man die **magnetische Spannung** $\boldsymbol{V}$:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$$



magnetische Spannung

Die magnetische Spannung wird aus einem Skalarprodukt gebildet, sie ist deshalb ein Skalar. Skalare haben keine Richtung, sie haben aber sehr wohl eine Orientierung (auch Richtungscharakter genannt). Es gilt $V_{AB} = -V_{BA}$. Zumeist wird die Orientierung mit einem Zählpfeil festgelegt: Die magnetische Spannung hat positives Vorzeichen, wenn das Potential (4.2) in Zählpfeilrichtung negativer wird; in diesem Fall stimmt die Zählpfeilrichtung mit der Richtung der Feldstärke überein. Wenn man den Daumen der rechten Hand in $\vec{J}$-Richtung hält (technische Stromrichtung), zeigen die gekrümmten restlichen Finger in V-Pfeilrichtung.

[§] Mit J werden manchmal auch die Polarisation oder das magnetische Dipolmoment bezeichnet – diese sind hier nicht gemeint. Gelegentlich wird die Stromdichte auch mit j bezeichnet; hier steht j jedoch für $\sqrt{-1}$.