

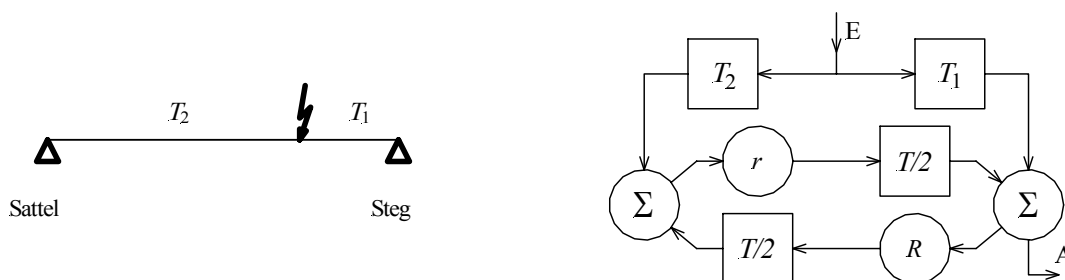
## 2.8 Das verallgemeinerte Leitungsmodell

Die Gitarre ist Teil eines signalverarbeitenden Systems, das aus einer Plektrumbewegung Schall erzeugt. Ein Teilsystem der Gitarre ist die Saite, mit den beiden Eingangsgrößen Plektrumskraft und -schnelle, und den Ausgangsgrößen Lager-Kräfte und -Schnellen (Akustikgitarre) bzw. Tonabnehmer-Spannung und -Strom (Elektrogitarre). In Kap. 1.5 wurde der Anzupfvorgang als Einprägen eines Kraftsprunges definiert, als dessen Folge eine spezielle Rechteckwelle auf der Saite hin- und herläuft. Diese (mehr oder weniger) periodische Wiederholung des Anregungssignals lässt sich sehr schön mit Signalflussdiagrammen beschreiben, wie sie auch bei digitalen FIR-/IIR-Filtern zur Anwendung kommen. Dass die Signale digitaler Filter üblicherweise zeit- und wertdiskret sind, während die Saitensignale zeit- und wertkontinuierlich sind, stellt kein Problem dar. Beim einfachen Leitungsmodell bildet man nur die zwischen den Saitenlagern auftretenden Laufzeiten durch Verzögerungsglieder (delay lines) nach, beim verallgemeinerten Modell können Anzupfpunkt und Tonabnehmerposition beliebig gewählt werden.

### 2.8.1 Ideale Saite, Stegtonabnehmer

Die folgenden Signalflussdiagramme **SFD** (Blockschaltbilder) stellen die Signalverarbeitung durch arithmetische Operationen dar. Die Grundoperationen sind Verzögerung, Addition, Subtraktion, und Multiplikation mit einer Konstanten. Die Bilder geben keine Auskunft über Quell-/Lastimpedanzen und dürfen nicht mit Schaltplänen verwechselt werden.

Als Anregungsgröße für die Saite wird eine Querkraft definiert, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf null springt. Dieser Kraftsprung läuft vom Anzupfort mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  nach beiden Seiten auseinander. Die Laufzeit bis zum Steg bzw. Sattel hängt von  $c$  und von der zurückzulegenden Distanz ab. Am Saitenende wird jeder Sprung reflektiert, wobei zwischen  $r_{\text{Steg}} = R$  und  $r_{\text{Sattel}} = r$  zu unterscheiden ist. Danach kreisen beide Sprünge in einer rekursiven Schleife, deren Gesamtlaufzeit  $T = 2L/c$  ist. **Abb. 2.26** zeigt das hierzu gehörende SFD:



**Abb. 2.26:** Signalflussdiagramm (SFD) zur nichtdispersiven Saitenschwingung.  $T_1$  bzw.  $T_2$  sind die Laufzeiten vom Anzupfort zum Steg bzw. Sattel,  $R$  ist der Steg-Reflexionsfaktor,  $r$  ist der Sattel-Reflexionsfaktor,  $T/2$  ist die Laufzeit zwischen Steg und Sattel bzw. Sattel und Steg.  $E$  = Eingang,  $A$  = Ausgang (Steg).

Das in Abb. 2.26 dargestellte SFD unterscheidet sich von der idealen Saite in einem wesentlichen Punkt: Der beim Anzupfen entstehende Impuls läuft auf ein und derselben Saite hin und her, wohingegen der Hin- und Rücklauf im SFD in nacheinander angeordneten getrennten Signalzweigen stattfindet; die Signalverarbeitung ist aber identisch, und in beiden Fällen enthält ein Zyklus *zwei* Reflexionen.

Durch Verschieben einzelner Laufzeiten kann man das SFD umformen, woraus die Kettenschaltung dreier Systeme entsteht (Abb. 2.27):

- Eine Grundverzögerung  $T_1$ , wodurch die Laufzeit vom Anzupfpunkt zum Steg nachgebildet wird.
- Ein rekursives System mit Laufzeit  $T$ , das die durch die Reflexionen aufrecht erhaltene Saitenschwingung nachbildet (IIR- bzw. AR-Filter)
- Ein Interferenzfilter mit Laufzeitunterschied  $2T_2$ , das die Klangfärbung durch den Anzupfpunkt nachbildet (FIR- bzw. MA-Filter). Für die einmalige Sattelreflexion gilt  $r \approx -1$ .

Der große Vorteil dieser Darstellung ist, dass "Anzupf-Filter" (FIR-Filter) und Generatorteil (IIR-Filter) unabhängig voneinander in getrennten Stufen erfasst werden. Nimmt man ungedämpfte, verlustfreie Schwingungen an ( $R \cdot r = 1$ ), so erzeugt das grenzstabile IIR-Filter nach Impulsanregung ein periodisches Signal. Hierzu gehört zwangsläufig ein harmonisches Linienspektrum, bei dem der Frequenzabstand gleich der Saitengrundfrequenz ist.

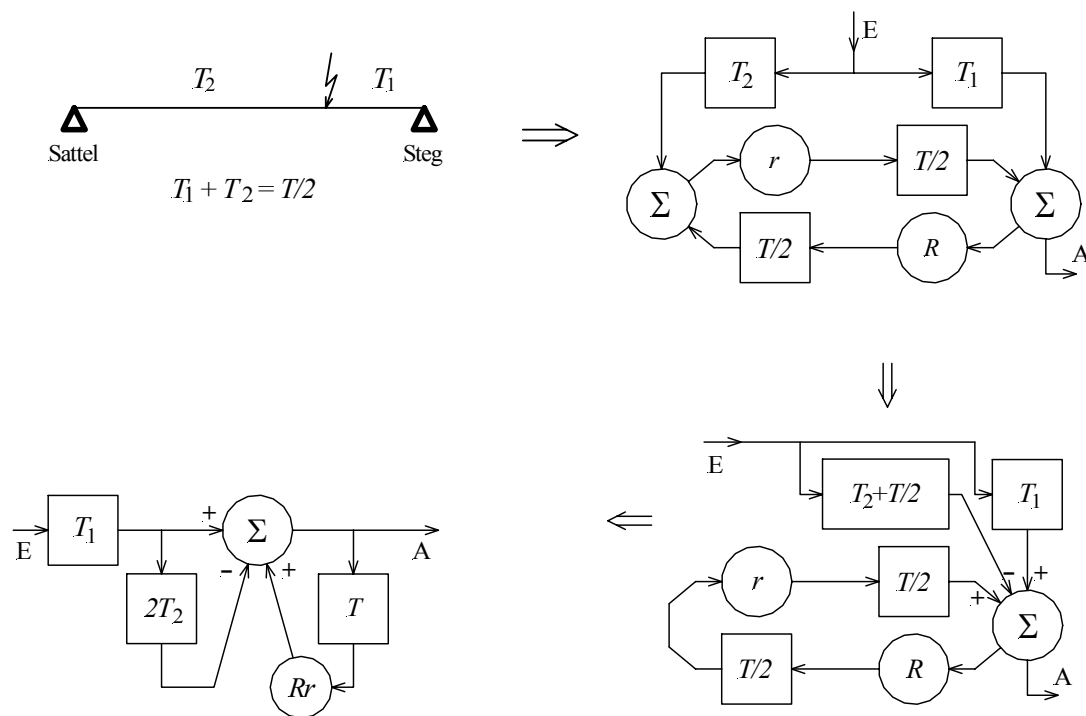


Abb. 2.27: Umgeformtes Signalflussdiagramm (nur ein Signalweg Saite → Steg). Die Reihenfolge von FIR-Filter ( $2T_2$ ) und IIR-Filter ( $T$ ) ist vertauschbar (kommutative Abbildungen im linearen System).

Die Umformung der FIR-Laufzeit erfolgt mit  $T_1 + T_2 = T/2$  zu:

$$(T_2 + T/2) - T_1 = T_2 + T/2 - (T/2 - T_2) = 2T_2$$

Aus dem in Abb. 2.27 dargestellten SFD kann nun mit einfachen Methoden der Signalverarbeitung [z.B. 5] das Frequenzverhalten abgeleitet werden. Nimmt man als Anregung einen kurzen Impuls (idealisiert: Dirac), der im IIR-Filter periodisch wiederholt wird, so ergibt sich ein Spektrum mit äquidistanten Linien konstanter Höhe. Dieses Spektrum wird beim Durchlaufen der folgenden Systeme gefiltert, also verändert. Eine reine Signalverzögerung um

eine konstante Laufzeit (z.B.  $T_1$ ) ändert nur das Phasenspektrum, nicht aber das Betragsspektrum. Da es für die folgenden Betrachtungen unerheblich ist, ob das Ausgangssignal insgesamt einige Millisekunden später ankommt oder nicht, wird diese Grundlaufzeit ignoriert. Nicht ignoriert werden darf die Laufzeit im FIR-Filter, denn hier werden zwei gegeneinander verzögerte Signale überlagert, woraus frequenzselektive Verstärkungen und Auslöschungen resultieren (Kammfilter). Die Reihenfolge FIR/IIR bzw. IIR/FIR darf vertauscht werden.

Die Filterwirkung eines **Kammfilters** ist in der Literatur ausführlich beschrieben, hier erfolgt nur eine Kurzdarstellung: Das Eingangszeitsignal einer Verzögerungsleitung kommt nach der Laufzeit (allgemein:  $T_x$ ) am Ausgang an, das Spektrum des Eingangssignals muss mit der Übertragungsfunktion multipliziert werden und ergibt das Spektrum des Ausgangssignals. Die Übertragungsfunktion  $\underline{H}$  einer (reinen) Verzögerungsleitung mit Laufzeit  $T_x$  ist:

$$\underline{H}(j\omega) = e^{-j\omega T_x}; \quad \omega = 2\pi f \quad \text{Laufzeit-Übertragungsfunktion}$$

Beim Kammfilter wird das verzögerte Signal zum unverzögerten addiert bzw. subtrahiert; damit erhält man die Kammfilter-Übertragungsfunktion zu:

$$\underline{H}_{FIR} = 1 - \exp(-j\omega T_x); \quad |\underline{H}_{FIR}| = 2 \cdot |\sin(\omega T_x / 2)| \quad \text{FIR-Filter}$$

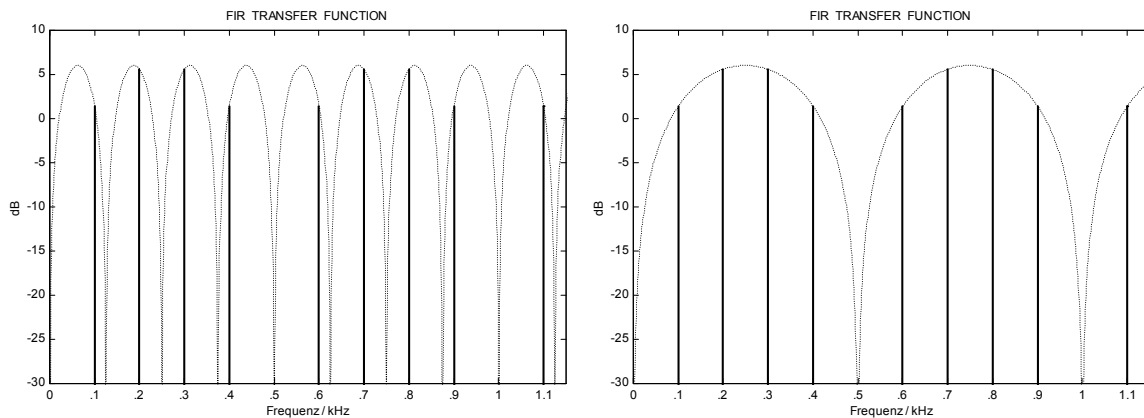
Weil die Impulsantwort von endlicher Dauer ist, spricht man auch vom **FIR-Filter** (Finite Impulse Response). Als Betragsfrequenzgang ergibt sich der Betrag einer Sinusfunktion, mit Nullstellen bei 0Hz und bei ganzzahlig Vielfachen vom Kehrwert der Verzögerungszeit  $T_x$ . Die Berechnung ist formal korrekt, aber in der Darstellung ungünstig, wie **Abb. 2.28** zeigt. Ähnliche Probleme sind bei zeitdiskreten Signalen bekannt, wenn das Abtasttheorem nicht eingehalten wird: Unterabtastung ergibt (meist unerwünschte) Rückfaltung. In diesem speziellen Fall ist die abtastbedingte Mehrdeutigkeit allerdings hilfreich. Über die Identität

$$|\sin(m\pi - \varphi)| \equiv |\sin(\varphi)| \quad \text{nur für } m = \text{ganzzahlig}$$

und einige Zwischenschritte kann die FIR-Übertragungsfunktion umgeformt werden in:

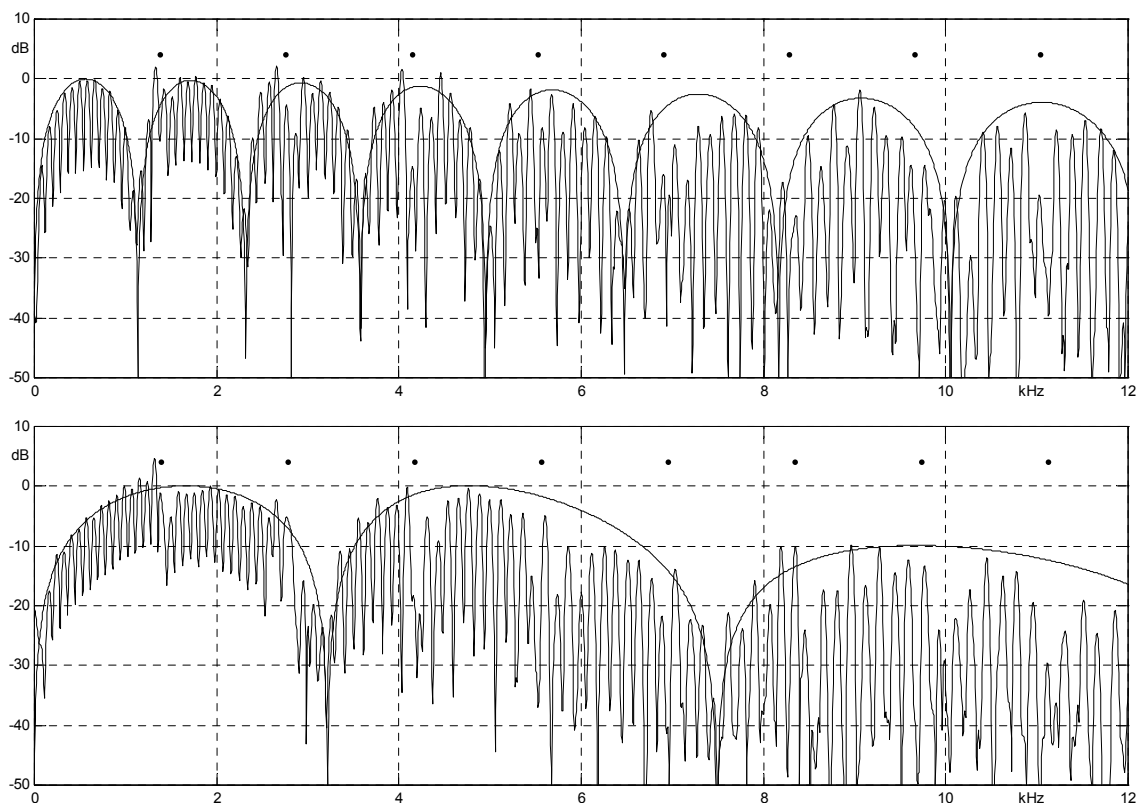
$$|\underline{H}_{FIR}| = \left| \sin\left(\pi \cdot \frac{f}{f_G} \cdot \frac{d}{M}\right) \right| \quad \text{FIR-Filter, umgeformt}$$

Hierbei ist  $d$  die Entfernung zwischen dem Anzupfpunkt und dem Steg, und  $M$  ist die Länge der leeren Saite (Mensur). Auch bei kürzer gegriffener Saite muss hier die Mensur eingesetzt werden, weil sie in die Formel für die Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit eingeht. Wird die leere Saite genau in der Mitte angezupft, enthält das Langzeitspektrum nur ungeradzahlige Harmonische; bei den geradzahligen liegen die Nullstellen der Sinusfunktion. Je näher der Anzupfpunkt am Steg liegt, desto weiter auseinander liegen die Hüllkurvenminima. Die Umformung ist nur im stationären Teil (diskretes Linienspektrum) gültig, nicht für den Einschwingvorgang; aber das ist Grundbedingung für jede Übertragungsfunktion: Sie gilt immer nur für den eingeschwungenen Zustand. Des weiteren ist zu berücksichtigen, dass bei dem o.a. Modell die Laufzeiten frequenzunabhängig sind – Dispersion ist (noch) nicht nachgebildet, gespreizte Spektren erfordern anstelle einfacher Verzögerungsglieder **Allpässe**, deren Laufzeitfrequenzgang die Saitendispersion approximiert (Kap. 2.8.4).



**Abb. 2.28:** Betragsfrequenzgang des FIR-Filters (...) und gefiltertes Linienspektrum für  $d = M/5$ . Die dargestellten Linien sind in beiden Bildern identisch, das rechts Bild zeigt die umgeformte FIR-Übertragungsfunktion.

In **Abb. 2.29** sind Messwerte einer angezupften  $E_2$ -Saite dargestellt. Die Distanz zwischen Anzupfort und Steg betrug  $d = 4,7$  cm bzw.  $1,5$  cm. Das erste Kammfilter-Minimum berechnet sich daraus zu  $1,1$  kHz bzw.  $3,5$  kHz. Im Bereich tiefer Frequenzen ist in der spektralen Hüllkurve die Kammfilterstruktur gut erkennbar; sie wird allerdings von den Dehnwellen-Resonanzen gestört (Kap. 1.4, im Abb. 2.29 durch Punkte gekennzeichnet). Im Vorgriff auf Kap. 2.8.4 ist in Abb. 2.29 bereits die dispersive Spreizung der spektralen Hüllkurve berücksichtigt.



**Abb. 2.29:** Gemessene Spektren,  $E_2$ -Saite (Impulsanregung),  $d = 4,7$  cm (oben) bzw.  $d = 1,5$  cm (unten). Die eingezeichnete Hüllkurve wurde gespreizt (Dispersion) und zu hohen Frequenzen hin leicht abgesenkt. Die beiden Messungen wurden an zwei unterschiedlichen  $E_2$ -Saiten durchgeführt (OVATION Viper EA-68).

Während das FIR-Filter die spektrale Hüllkurve bestimmt, definiert das rekursive Filter die Frequenz der einzelnen Spektrallinien. Die Impulsantwort des rekursiven Teilfilters dauert unendlich lang, deshalb ist hierfür auch der Begriff **IIR-Filter** gebräuchlich (Infinite Impulse Response). Sind beide Reflexionsfaktoren gleich 1, dann wird ein kurzer Anregungsimpuls ohne Abschwächung unendlich lange in der Schleife kreisen; ein derartiges Filter heißt grenzstabil. Reale Saiten haben Reflexionsfaktoren  $< 1$ , deshalb klingt eine impulsförmige Anregung mit der Zeit ab. Für einen vollständigen Schleifenumlauf wirken beide Reflexionsfaktoren multiplikativ verknüpft ( $R \cdot r$ ).

Für  $R \cdot r = 0,9$  nimmt die Impulshöhe bei einmaligem Umlauf von z.B. 1 auf 0,9 ab, bei zweimaligem Umlauf auf 0,81, bei  $n$ -maligem Umlauf auf  $0,9^n$ . Die Amplituden der im Abstand  $T$  aufeinander folgenden Impulse bilden eine geometrische Folge, für  $R \cdot r < 1$  spricht man von **exponentiellem Abklingen**. Schon in Kap. 1.6 wurden quantitative Aussagen zum Abklingen gemacht, die Schleifenfaktoren ( $R \cdot r$ ) sind bei der Gitarrensaite sehr nahe an 1 (z.B. 0,993). Im FIR-Filter tritt nur eine einmalige Reflexion auf, hier kann in sehr guter Näherung  $r = -1$  gesetzt werden; im IIR-Filter wird die Schleife aber unendlich oft durchlaufen, hier ist diese Näherung nicht zulässig.

Kap. 2.5 hat gezeigt, dass der Reflexionsfaktor nicht konstant, sondern frequenzabhängig ist. Ursache sind Steg- und Sattel-Resonanzen, die von der Kombination aus Massen und Federn gebildet werden. Diese Massen und Federn befinden sich nicht alle im Steg bzw. im Sattel, sie können auch z.B. im Hals lokalisiert sein, und auf den Sattel wirken [8]. Bei der Einfügung eines frequenzabhängigen Reflexionsfaktors in das SFD (Abb. 2.27) ist zu beachten, dass das als Kreis ( $R \cdot r$ ) dargestellte System damit zum Filter wird:  $R \cdot r(j\omega)$  ist die frequenzabhängige Übertragungsfunktion dieses **Reflexions-Filters**. Über die Schleifenlaufzeit  $T$ , die bei Berücksichtigung der Dispersion frequenzabhängig ist, und  $R \cdot r(j\omega)$  ergibt sich die Abkling-Zeitkonstante für jeden Teilton. Das SFD (Abb. 2.27) berücksichtigt nicht die Dämpfungs-Ursache, mit  $R \cdot r(j\omega)$  wird die *Gesamtdämpfung* modelliert. Falls erforderlich, können hierfür aber auch mehrere Einzelfilter in Kette geschaltet werden, um beispielsweise die innere Saitendämpfung in einem eigenen Subsystem modellieren zu können.

Vor dem mit E bezeichneten Eingang in Abb. 2.27 ist das **Plektrumfilter** anzuordnen, das aus einem idealen Sprung (oder aus einem Impuls) die reale Anregungskraft formt. Nach dem Ausgang A folgt das **Piezofilter**, oder – bei Akustik-Gitarren – das Korpus- und Abstrahlfilter. Der Körperschallpfad durch den Gitarrenhals ist hierbei nicht nachgebildet. Fasst man den Sattel nur als Schwingungsabsorber auf, ist dies auch nicht nötig; die vom Sattel hervorgerufene Dämpfung ist ja bei  $R \cdot r$  berücksichtigt. Es könnte aber auch ein Teil der in den Sattel fließenden Schwingungsenergie abgestrahlt werden, oder über den Steg wieder in die Saite eingekoppelt werden, was dann sogar in umgekehrter Richtung funktionieren muss. Einen ähnlichen Nebenweg nehmen (allerdings direkt über die Saite) die in Kap. 1.4 besprochenen Dehnwellen.

Eine einfache Nachbildung solcher paralleler Pfade ist mit zusätzlichen rekursiven Schleifen möglich. Es soll aber nochmals betont werden, dass hiermit die Energieflüsse nicht automatisch richtig dargestellt werden. Ein Summationspunkt im SFD addiert zwei Signale, z. B. zwei Kräfte. Er bildet aber nicht die Impedanzen nach – dies muss gegebenenfalls gesondert berücksichtigt werden.