

Als **Fazit** kann man festhalten: Innere Verluste und Strahlungsverluste können vernachlässigt werden, solange man nur Wellenausbreitung über kurze Saitenstücke betrachtet. Analysiert man länger dauernde Schwingungen, findet man bei E-Gitarren Dämpfungsmechanismen, deren Wirkung zu hohen Frequenzen hin zunimmt (Kap. 7.7), und zusätzliche, frequenzselektive Absorptionen (z.B. Stegresonanzen). Bei Akustikgitarren ist auch im tieffrequenten Bereich mit wesentlichen Absorptionen zu rechnen, weil ein nicht zu vernachlässigender Teil der Schwingungsenergie an die Auflager (Steg, Bünde) abgegeben wird.

2.7 Dispersive Biegewellen

Die einfache Leitungstheorie geht von ortsunabhängigem Wellenwiderstand und frequenzunabhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeit aus. Die Transversalwellen der Gitarrensaite breiten sich aber **dispersiv**, d.h. mit frequenzabhängiger Geschwindigkeit aus; die hohen Frequenzen laufen schneller als die tiefen (Kap. 1.2.1). Ursache hierfür ist die Biegesteifigkeit; sie vergrößert die spannkraftabhängige Quersteifigkeit.

Die Modellierung der Saite als dispersive Leitung ist aufwändig und nicht immer erforderlich. Zumeist interessieren nämlich nur zwei oder drei Punkte auf der Saite (Sattel, Anzupfort und Steg), ggf. kommt noch eine Tonabnehmerposition hinzu. Die Leitungsstücke zwischen den diskreten Punkten können leicht durch Allpässe nachgebildet werden (Kap. 2.8). Wenn allerdings die Reflexionsbedingungen genau beschrieben werden sollen, ist ein detaillierteres Modell erforderlich. Für eingeschwingene (monofrequente) Teiltöne ergibt sich die einfachste Lösung: Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand ändern sich nur relativ wenig als Funktion der Frequenz; bei schmalbandiger Betrachtung können sie als konstant angenommen werden. Ein- und Ausschwingvorgänge erstrecken sich aber über einen *Frequenzbereich*, so dass in diesen Fällen mit frequenzabhängigen Größen gearbeitet werden muss.

In Abb. 2.5 wurde für die dispersionsfreie Saite ein einfaches Modellelement vorgestellt. Als beschreibende Signalgrößen reichten die orts- und zeitabhängige Kraft und Schnelle. Die Biegesteifigkeit der realen Saite erfordert aber, dass zusätzlich zur (Quer-) **Kraft F** ein orts- und zeitabhängiges **Biegemoment M** spezifiziert wird, und dass ergänzend zur (Quer-) **Schnelle v** eine **Winkelgeschwindigkeit w** eingeführt wird. Als Konsequenz erhält man eine frequenzabhängige Phasenlaufzeit (Abb. 1.6). Das dispersive Leitungselement ist nicht mehr als Zweitor (Vierpol) beschreibbar, vielmehr muss ein **Viertor** (Achtpol) spezifiziert werden [11]. Seine Eingangssignalgrößen sind F_1, M_1, v_1, w_1 , seine Ausgangssignalgrößen sind F_2, M_2, v_2, w_2 . Da die Saitenquerabmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind, dürfen Schubdeformationen und Rotations-Trägheitsmomente vernachlässigt werden (Euler-Bernoulli-Theorie des Biegestabes), so dass als Systemgrößen (im Inneren des Viertors) die längenspezifische **Masse m'** , die längenspezifische **Nachgiebigkeit n'** , und die **Biegesteifigkeit B** übrig bleiben.

Die biegesteife Saite hat *zwei* **Wellenwiderstände** $Z_F = F/v$ bzw. $Z_M = M/w$, und *zwei* Wellenleistungen $P_F = Fv$ bzw. $P_M = Mw$. An beiden Saitenlagern (Steg, Sattel) sind je *zwei* Lagerimpedanzen wirksam, und zusätzlich können in jedem Lager Verkopplungen zwischen den vier Signalgrößen auftreten. Beispielsweise kann eine Randkraft zwangsweise ein Randmoment erzeugen, oder eine Auslenkung führt zwangsläufig zu einer Verdrehung. Da alle diese Beziehungen frequenz- und richtungsabhängig auftreten, sind Vereinfachungen und Näherungen unerlässlich.

Wellen mit niedriger Ordnung (Grundton und tieffrequente Teiltöne) werden von der Biegesteifigkeit nur wenig beeinflusst. Die wirksame Gesamt-Steifigkeit wird praktisch nur von der Spannkraft Ψ bestimmt, die Dispersion ist unbedeutend (Abb. 1.4). Bei Teiltönen höherer Ordnung kann aber insbesondere bei den tiefen Saiten der Einfluss der Biegesteifigkeit nicht mehr ignoriert werden. Die für höhere Teiltöne maßgebliche (Gesamt-) Steifigkeit besteht aus zwei Komponenten: Einem frequenzunabhängigen, spannkraftbedingten Anteil, und einem frequenzabhängigen, biegesteifigkeitsbedingten Anteil. Die Differentialgleichung der Biege- welle ist von vierter Ordnung, deshalb sind vier Randbedingungen erforderlich, und vier unabhängige Fundamental-Lösungen möglich. Wie bei der biegesteifigkeitsfreien Saite treten in Längsrichtung eine hin- und eine rücklaufende **Welle** auf, aber zusätzlich überlagert sich in Lagernähe ein exponentielles **Randfeld**. Erfreulicherweise ist diese Randfeld nach kurzer Distanz abgeklungen, weswegen im lagerfernen Saitenbereich mit nur einem Wellentyp gerechnet werden darf. Ohne Randfeld erhält man eine einfache Verkopplung zwischen F , v , M , w : Die Kenntnis einer dieser vier Größen reicht aus, um die anderen drei zu beschreiben. Außer im Randbereich genügt *eine* Wellengleichung zur Beschreibung der Saitenschwingung (in einer Ebene), für die allerdings eine frequenzabhängige Wellenzahl $k(\omega)$ erforderlich ist.

Zur Beschreibung der Reflexionen ist diese Vereinfachung aber nicht zulässig, denn Reflexionen treten ja gerade im Randbereich auf. Rand meint hier Saitenanfang bzw. -ende, und nicht die Zylindermantelfläche. Im Randbereich ist neben der Wellengleichung ein Randfeld mit eigener Wellenzahl k' anzusetzen; k' wird **Randfeldzahl** genannt. Zwar werden auch im Randbereich die Signalgrößen F und v über Z_F , sowie M und w über Z_M verknüpft, aber F kann wegen des Randfeldes unabhängig von M jeden Wert annehmen (und umgekehrt). Während bei der dispersionsfreien Saite der Reflexionsfaktor nur vom Verhältnis Wellenwiderstand / Lagerimpedanz abhängt, definieren bei der biegesteifen Saite zwei Wellenwiderstände und zwei Lagerimpedanzen (je Lager!) die **Reflexionsfaktoren**. So ist es (zumindest theoretisch) möglich, die Fv -Welle am Lager komplett zu reflektieren, und die Mw -Welle komplett zu absorbieren. Dies bedeutet aber nicht, dass dann keinerlei Mw -Welle zurückläuft; das Randfeld sorgt dafür, dass schon nach kurzer Distanz wieder eine Mw -Welle vorhanden ist – die Energie hierfür wird der Fv -Welle "entzogen".

Aus der Fülle der in jeder Schwingungsebene möglichen Reflektionsbedingungen sind einige Sonderfälle leicht analysierbar:

- Freies Saitenende: Die Saite 'hängt in der Luft', das Ende kann keine Querkraft F und kein Moment M aufnehmen. Dies scheint praxisfern, kann aber bei Resonanz auftreten.
- Geklemmte Saite: Querschnelle v und Winkelgeschwindigkeit w sind null.
- Geführtes Ende: Winkelgeschwindigkeit w und Querkraft F sind null.
- Gestützte Saite: Querschnelle v und Moment M sind null.

Das reale Saitenlager wird durch keinen der obigen Sonderfälle repräsentiert, denn die Saite endet normalerweise nicht am Lager, sondern wird darüber hinweg geführt. Häufig liegt die Saite in einer kleinen Kerbe, die nur linienförmigen Kontakt ermöglicht. Dies unterbindet die Querbewegung, lässt aber Kräfte, Winkelbewegungen und Momente zu. Interpretiert man dieses Lager als große **Sperrmasse**, so werden an ihm zwar Fv -Wellen reflektiert, aber nicht Mw -Wellen! Für den Extremfall einer Saite, deren Steifigkeit nur durch die Biegesteifigkeit bestimmt wäre (Balken), reflektiert eine Sperrmasse 50% der einfallenden Wellen-Energie; die anderen 50% werden als Biegeenergie über das Lager hinweg in den jenseitigen Saitenrest eingekoppelt. Im anderen Extremfall ($B = 0$) werden hingegen 100% der Energie reflektiert.

Um die Bedeutung der Biegesteifigkeit abzuschätzen, wird folgender **Modellfall** betrachtet: Die Saite liegt auf einem Schneiden-Lager auf, das keine Querbewegung ermöglicht; sie wird über das Lager hinaus unendlich weitergeführt. Das andere Saitenlager ist ideal reflektierend. Der am Lager transmittierte prozentuale Energieanteil ist in **Abb. 2.22** für eine E_2 -Saite dargestellt. Bei tiefen Frequenzen ist der Einfluss der Biegesteifigkeit vernachlässigbar, die Energie wird fast vollständig reflektiert. Aber bereits im mittleren Frequenzbereich wird ein erheblicher Prozentsatz über das (unbewegliche!) Lager hinweggekoppelt. Jenseits des Lagers entsteht nicht etwa eine reine M_W -Welle, vielmehr sorgt das Randfeld wieder für die Kombination aus F_V - und M_W -Welle. In **Abb. 2.22** wurde die E_2 -Saite ausgewählt, weil sich bei ihr die Biegesteifigkeit am stärksten auswirkt; bei allen anderen Saiten ist der dargestellte Effekt schwächer ausgeprägt.

Die reale Saite wird natürlich nicht unendlich lange weiter geführt, sie endet nach wenigen Zentimetern am Wirbel ("an der Mechanik"), im Saitenhalter, im Korpus, oder wo eben gerade Platz war. **Abb. 2.22** zeigt allerdings deutlich, dass es nicht egal ist, wie und wo die Saite befestigt wird, denn die Saitenstücke jenseits der Lager können bei entsprechender Länge als angekoppelte Resonatoren beachtliche Schwingungsenergie ableiten. **Abb. 2.22** darf allerdings nicht in der Weise missverstanden werden, dass der dargestellte Energieprozentsatz prinzipiell bei jeder Reflexion verloren geht. Der über das Lager hinweg gekoppelte Anteil kann ja z.B. am Saitenhalter reflektiert werden, läuft daraufhin zum Lager zurück und wird wieder in den Hauptteil der Saite zurückgekoppelt. Außerdem hat die reale Saite nicht nur Linienkontakt mit dem Lager; durch einen Flächenkontakt (Rille) kann neben einer reinen Querkraft auch ein Moment aufgenommen werden. Einige Steg-/Sattelkonstruktionen sind absichtlich (?) mit größerer Auflagefläche oder direkt als Klemm-Mechanik ausgeführt; für sie wird ein weiterer Modellfall am Kapitelende diskutiert.

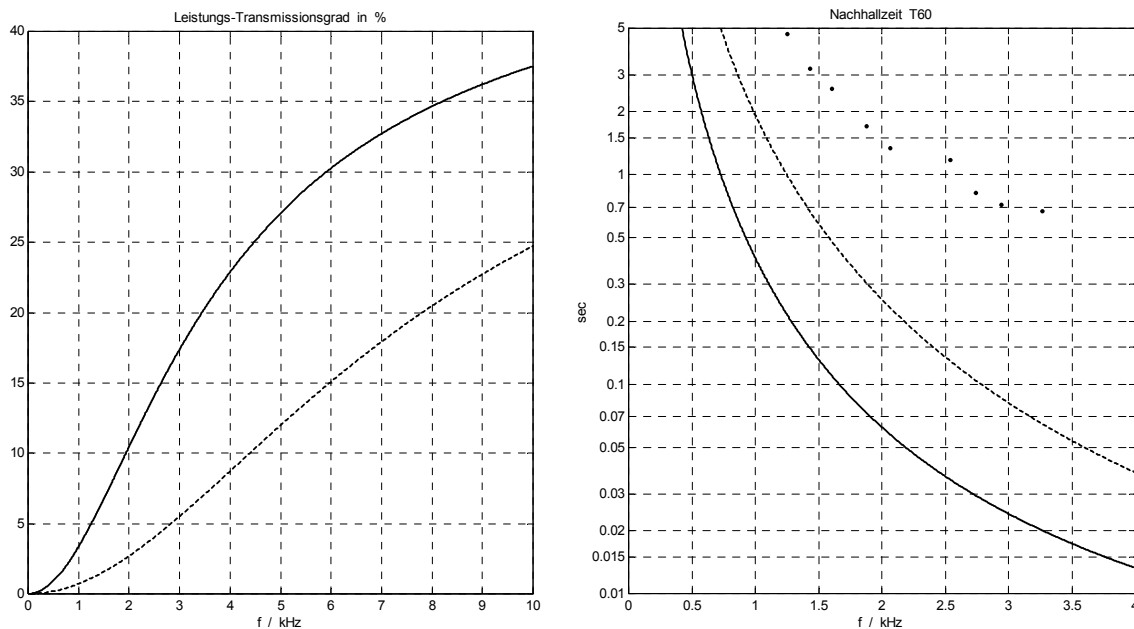


Abb. 2.22: Transmissionsgrad bei einer schneidengelagerten E_2 -Saite (42 mil). Im rechten Bild ist die rein transmissionsbedingte (!) Teilton-Ausschwingdauer für 60 dB Pegelabfall angegeben (Nachhallzeit T_{60}). Das Verhältnis Kern- / Außendurchmesser beträgt $\kappa = 50\%$ (—) bzw. 33% (----). Die im rechten Bild eingezeichneten Punkte sind Messwerte einer Fender-Saite (42 mil, 3150), ermittelt an einer Ovation EA-86. Der oben modellhaft angegebene Transmissionsverlust ist wesentlich größer als die realen Schwingungsverluste.

Zur Berechnung der Schwingungs- und Reflexionsbedingungen teilt man die Saite in kleine **Zylinderstückchen** der Länge dz . Im Ruhezustand stehen die kreisförmigen Trennflächen (Querschnitte) senkrecht auf der z -Achse. Bei Anregung bleiben die Querschnittsflächen zwar eben, verlieren wegen der Biegemomente aber ihre Parallelität und bilden einen Krümmungswinkel. Bewegungs-, Trägheits- und Festigkeitsetze ergeben die partielle Differentialgleichung für die biegegesteife Saite (Details im Anhang):

$$\Psi \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - B \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} = m' \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{Saiten-Differentialgleichung}$$

Die Differentialgleichung (DGL) ist *partiell*, weil nach dem Ort z und nach der Zeit t differenziert wird; sie ist *linear*, weil die Variablen: Querauslenkung ξ , Ort z und Zeit t nur in erster Potenz vorkommen; sie enthält *konstante Koeffizienten*, weil die Systemgrößen Spannkraft Ψ , Biegesteifigkeit B und längenspezifische Masse m' nicht von z und t abhängen (idealisiert); und sie ist *homogen*, weil sie keine externe Anregung enthält.

B und m' werden durch Materialdaten und Geometrie der Saite bestimmt, die Spannkraft Ψ ergibt sich aus der geforderten Grundfrequenz f_G . Eine **Lösung** der DGL ist jede Funktion $\xi(z,t)$, welche die DGL erfüllt. Nach DANIEL BERNOULLI wird die Lösung als Produkt mit einem rein zeitabhängigen und einem rein ortsabhängigen Faktor für sinusförmige Bewegungen formuliert:

$$\xi(z,t) = \hat{\xi} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \cdot e^{-jkz} = \underline{\xi} \cdot e^{-jkz} \quad \text{Lösungsansatz}$$

Der erste Faktor $\underline{\xi}$ enthält die Kreisfrequenz ω und die Anfangsphase φ , aus einer partiellen Differentiation nach der Zeit t wird eine Multiplikation mit $j\omega$. Der zweite Faktor enthält die Wellenzahl k , aus einer partiellen Differentiation nach dem Ort z wird eine Multiplikation mit $-jk$. Setzt man die entsprechenden Ableitungen von $\xi(z,t)$ in die DGL ein, ergibt sich:

$$-k^2 \Psi \underline{\xi} - k^4 B \underline{\xi} = -\omega^2 m' \underline{\xi} \quad \text{charakteristische Gleichung}$$

Die charakteristische Gleichung darf durch $\underline{\xi}$ gekürzt werden (der Fall $\underline{\xi} \equiv 0$ ist trivial), womit man für k eine Bestimmungsgleichung erhält, die nur noch von den Systemgrößen abhängt. Da es sich um eine Gleichung vierten Grades handelt, ergeben sich vier unabhängige Lösungen, zu denen vier unabhängige Randbedingungen spezifiziert werden müssen. Zwei k -Werte sind im Sinne des Lösungsansatzes reell, der Exponent ist somit imaginär ($-jkz$); hiermit wird eine nach links bzw. rechts laufende **sinusförmige Welle** beschrieben. Die anderen beiden k -Werte sind imaginär, der Exponent ist somit reell; dies beschreibt ein vom Saitenlager ausgehendes exponentiell anklingendes bzw. abklingendes **Randfeld**. Nur das abklingende Randfeld ist von praktischer Bedeutung. Die allgemeine Bewegungsgleichung ergibt sich als Überlagerung der beiden Wellengleichungen und der Gleichung des abklingenden Randfeldes:

$$\xi(z,t) = \underline{\xi}_1 \cdot e^{+jkz} + \underline{\xi}_2 \cdot e^{-jkz} + \underline{\xi}_3 \cdot e^{-k'z} \quad \text{allgemeine Lösung}$$

Die Zeitabhängigkeit steckt hierbei in den drei unabhängigen komplexen Amplituden $\underline{\xi}_i$, die Frequenz ist für alle drei Komponenten identisch.

Im Folgenden wird eine Saite ($z \geq 0$) betrachtet, bei $z = 0$ befindet sich das (linke) Lager. Mit

$$\xi_A(z, t) = \underline{\xi} \cdot e^{jkz}, \quad \underline{\xi} = \hat{\xi}_A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}; \quad \text{Anregung}$$

wird eine nach links auf das Lager zulaufende sinusförmige Welle beschrieben (ξ = Auslenkung). Ein Teil ihrer Energie wird bei $z = 0$ reflektiert, der restliche Teil transmittiert:

$$\xi_R(z, t) = \zeta \cdot \underline{\xi} \cdot e^{-jkz}, \quad \xi_T(z, t) = \psi \cdot \underline{\xi} \cdot e^{jkz}; \quad \text{Reflexion, Transmission}$$

Reflexionsfaktor ζ und Transmissionsfaktor ψ sind im allgemeinen Fall komplex. Im betrachteten Saitenstück ($z \geq 0$) überlagern sich drei Auslenkungen:

$$\xi(z, t) = \underline{\xi} \cdot \left(e^{jkz} + \zeta \cdot e^{-jkz} + \gamma \cdot e^{-k'z} \right) \quad z \geq 0$$

γ ist der komplexe Randfeldfaktor. Jenseits des Lagers, im Transmissionsbereich, überlagern sich zwei Auslenkungen:

$$\xi(z, t) = \underline{\xi} \cdot \left(\psi \cdot e^{jkz} + \delta \cdot e^{k'z} \right) \quad z \leq 0$$

Auch hier entsteht (zusätzlich zum transmittierten Anteil) ein Randfeld mit anderer Wellenzahl k' , und Randfeldfaktor δ . Randfelder und Wellen sind Funktionen des Ortes (z) und der Zeit (t). Die Zeitabhängigkeit wird mit ω als Kreisfrequenz durch $\underline{\xi}$ beschrieben, die Ortsabhängigkeit mit den **Randfeldzahlen** k und k' . Für die fortschreitenden Wellen ist $k = 2\pi / \lambda$ reziprok zur Wellenlänge λ . Die Grundfrequenz f_G ist die tiefste Eigenfrequenz einer Saite, λ_G entspricht der doppelten Saitenlänge, bei der E₂-Saite sind das ca. 1,3 m für 82,4 Hz. Zu Teiltönen im Bereich um 10 kHz gehört folglich eine Wellenlänge um 1 cm ($\lambda_n = \lambda_G/n$). Dies ist immer noch ausreichend groß gegenüber dem Saitendurchmesser, sodass mit Näherungen gerechnet werden darf. Bei den hohen Saiten sind diese Voraussetzungen noch besser erfüllt.

Aus der Randfeldzahl k' lässt sich eine Grenzdistanz $z_g = 1/k'$ abschätzen, die angibt, in welcher Entfernung vom Lager das Randfeld auf 1/e abgeklungen ist. Da es sich hierbei um eine Biegewelleneigenschaft handelt, ist (insbesondere bei umspannenen Saiten) die Berechnung etwas komplizierter; **Abb. 2.23** zeigt typische Werte für z_g .

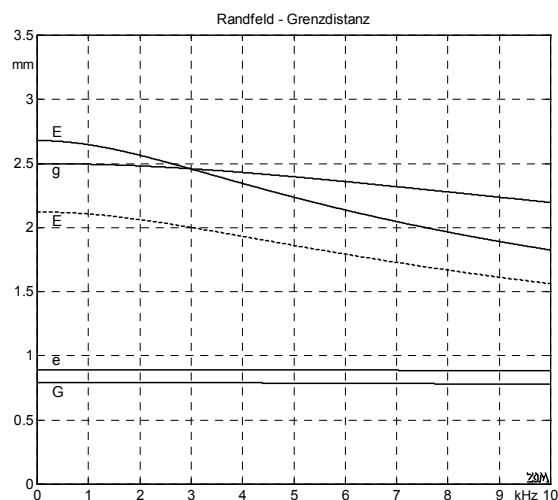


Abb. 2.23: Randfeld-Grenzdistanz z_g (in mm)

E₂-Saite: 53 mil, $\kappa = 0.4$

E₂-Saite: 42 mil, $\kappa = 0.4$ ----

G₃-Saite: 24 mil, $\kappa = 0.5$

g₃-Saite: 20 mil, plain

e₄-Saite: 12 mil, plain

Die zum Lager hinlaufende Anregungswelle ist durch ihre Amplitude $\hat{\xi}_A$ und ihre Frequenz ω vorgegeben. Über die Systemgrößen B , m' und Ψ sind für diese Welle auch F , M , w definiert, sowie die Wellenwiderstände Z_F und Z_M , und mit $v = \partial \xi / \partial t$ ist auch die Schnelle v vorgegeben. Das Lager ($z = 0$) ist (zunächst) durch seine beiden **Lagerimpedanzen** $Z_{FL} = F(0)/v(0)$ und $Z_{ML} = M(0)/w(0)$ definiert. Bei Betrachtung der Saite als lineares System erhält man im Bereich $z \geq 0$ die Überlagerung dreier Schwingungen: Die gegebene Anregungswelle ($\hat{\xi}_A$), die reflektierte Welle (ζ), und das Randfeld (γ). ζ und γ sind zunächst zwei Unbekannte, die über die beiden Lagerimpedanzen berechnet werden können.

Die Systemgrößen der Saite sind Spannkraft Ψ , längenspezifische Masse $m' = \rho S$ und Biegesteifigkeit $B = ES^2/4\pi$. Hierbei ist ρ = Dichte, S = Querschnittsfläche, E = Elastizitätsmodul. Bei umsponnenen Saiten wird die Biegesteifigkeit überwiegend vom Kern bestimmt, die Dichten von Kern und Umspinnung können sich unterscheiden [Anhang]. Aus diesen Größen lassen sich die **Wellenzahl** k und die **Randfeldzahl** k' berechnen:

$$k = \sqrt{\frac{\Psi}{2B} \left(\sqrt{1 + 4B\omega^2 m' / \Psi^2} - 1 \right)} \quad k' = \sqrt{\frac{\Psi}{2B} \left(\sqrt{1 + 4B\omega^2 m' / \Psi^2} + 1 \right)}$$

Auch sie sind Systemgrößen, d.h. signalunabhängig. Die biegesteife, gespannte Saite kann durch Variation von B und Ψ in zwei Grenzfälle überführt werden: Für $B = 0$ erhält man die dispersionsfreie Saite (auch biegeweich genannt), und für $\Psi = 0$ ergibt sich der Biegebalken ohne Spannkraft. Die Wellenzahlen entarten hierfür zu:

$$k \rightarrow \omega \sqrt{\frac{m'}{\Psi}} = \frac{\omega}{c} \quad k' \rightarrow \infty \quad B \rightarrow 0 \quad \text{Saite ohne Biegesteifigkeit}$$

$$k \rightarrow \sqrt{\frac{\omega}{B} \sqrt{Bm'}} = \frac{\omega}{c(\omega)} \quad k' \rightarrow k \quad \Psi \rightarrow 0 \quad \text{Balken ohne Spannkraft}$$

Die Phasengeschwindigkeit c ist für $B \neq 0$ frequenzabhängig, für $B \rightarrow 0$ konstant. Der Wellenreflexionsfaktor ζ berechnet sich zu:

$$\zeta = \frac{(Bk^2 + \Psi + \omega Z_{FL}/k) (\omega Z_{ML}/Bk + jk'/k) + (Bk'^2 - \Psi + j\omega Z_{FL}/k') (1 + \omega Z_{ML}/Bk)}{(Bk^2 + \Psi - \omega Z_{FL}/k) (\omega Z_{ML}/Bk + jk'/k) - (Bk'^2 - \Psi + j\omega Z_{FL}/k') (1 - \omega Z_{ML}/Bk)}$$

Die Formeln beginnen, länglich zu werden – und beschreiben das Lager immer noch nicht vollständig. Denn die in der Literatur manchmal zu findende Vereinfachung auf zwei Lagerimpedanzen Z_{FL} und Z_{ML} ist nicht immer hinreichend: Im allgemeinen Fall kann eine Kopplung zwischen den Transversalgrößen F bzw. v , und den Biegegrößen M bzw. w auftreten; die Lagerimpedanz erhält dann Matrixform und noch einen zusätzlichen **Koppelterm**. Zwar ist hiermit die formale Beschreibung immer noch explizit möglich, der praktische Nutzen der Formeln wird aber zunehmend eingeschränkt, weil die einzelnen Lagergrößen nicht mehr mit ausreichender Genauigkeit gemessen werden können. Die unüberschaubare Mannigfaltigkeit der Lagerparameter zwingt zu Vereinfachungen, aber auch zur Frage, wie genau diese dann im Einzelfall zutreffen.

Die Saitenschwingung kann auf verschiedene Arten approximiert werden:

- a) Die einfachste Näherung beschreibt die Saite ohne ihre Biegesteifigkeit. Die Teiltöne liegen damit harmonisch, die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist frequenzunabhängig, zur Lager- und Reflexionsbeschreibung reicht eine Lagerimpedanz Z_{FL} , die z.B. mit einem Impedanzmesskopf ermittelt werden kann. Für die Grundschiwingung f_G und die niedrigsten Teiltöne ist diese Näherung in vielen Fällen ausreichend, aber schon im mittleren Frequenzbereich erkennt man deutliche Abweichungen zwischen Rechnung und Messung (Abb. 1.5, 1.7).
- b) Eine leicht erreichbare Verbesserung stellt die Teiltonberechnung mit Berücksichtigung der Biegesteifigkeit dar; im Mittel wird hierdurch die Teiltonspreizung recht gut getroffen. Berücksichtigt man auch noch die Dehnwellen (Abb. 1.17), so ergibt sich eine brauchbare Näherung für das Pegelspektrum.
- c) Zur Berechnung der Abklingvorgänge müssen die Lagerimpedanzen bekannt sein. Bei sehr dünnen Saiten darf die Biegesteifigkeit vernachlässigt werden, bei dickeren Saiten muss neben der Lagerimpedanz Z_{FL} auch die Lagerimpedanz Z_{ML} bekannt sein.
- d) Die vermeintlich 'vollständige' Lagerbeschreibung entartet schnell zu einem unübersichtlichen Gleichungssystem: In zwei orthogonalen Schwingungsebenen müssten je drei Lagerimpedanzen definiert werden, mit zusätzlichen Koppelimpedanzen zwischen den beiden Ebenen. Ergänzend sollte eine Longitudinalwellen-Impedanz berücksichtigt werden, ebenfalls mit Modenkopplung zu den beiden orthogonalen Transversalwellen. Vermutlich kann eine Torsionswelle auf der Saite vernachlässigt werden. Abgesichert ist diese Vermutung aber noch nicht; bei der gestrichenen Saite ist die Torsionswelle wesentlich. Da alle Lager- und Koppelimpedanzen (u.U. stark) von der Frequenz abhängen, entsteht eine unüberschaubare Parametervielfalt.

Das nächste **Beispiel** zeigt, dass die Saiten-Biegesteifigkeit auch bei tiefen Frequenzen für Probleme sorgen kann – obwohl in diesem Bereich eigentlich die Spannsteifigkeit bei weitem überwiegt. Zur Berechnung wird idealisierend ein Stützlager angenommen, das sich in Querichtung nicht bewegen lässt; die Transversalschnelle ist somit an diesem Lager null. Für Biegevorgänge, die an die Winkelgeschwindigkeit gekoppelt sind, soll dieses Lager aber ein Trägheitsmoment aufweisen (**Sperrmasse**). Durch die (material- und geometrieabhängige) Biegesteifigkeit der Saite und die Lagerträgheit kann eine Resonanzstelle entstehen, bei der u.U. ein Großteil der Schwingungsenergie absorbiert bzw. auf den jenseitigen Saitenteil gekoppelt wird (**Totaldurchgang**). Für sehr geringe oder sehr große Sperrmassen liegt die Resonanzfrequenz bei sehr hohen oder sehr tiefen Frequenzen und stört nicht; bei entsprechender Dimensionierung sind aber auch Resonanzen im mittleren Frequenzbereich erzielbar. Derartige Resonanzen sind nicht generell unerwünscht – vielleicht möchte der Gitarrenbauer ja gerade bei dieser Frequenz eine etwas größere Absorption erreichen. Zum gezielten Einsatz dieser Maßnahme müsste dann aber das (frequenzabhängige) Trägheitsmoment der Lager bekannt sein, was messtechnisch Probleme bereitet.

Die folgende Berechnung umgeht die messtechnischen Schwierigkeiten und definiert idealisierte Lagerparameter, ohne sich an einer speziellen Realisierung zu orientieren. In der später folgenden Diskussion der Korpusparameter wird diese Thematik nochmals aufgegriffen und präzisiert.

Als BEISPIEL wird eine umspinnene E₂-Saite (46 mil Durchmesser) betrachtet. Sie ist so gelagert, dass ihre Querbewegung null ist; Z_{FL} wird somit unendlich. Der Reflexionsfaktor

$$\zeta = \frac{(Bk^2 + \Psi + \omega Z_{FL}/k)(\omega Z_{ML}/Bk + jk'/k) + (Bk^2 - \Psi + j\omega Z_{FL}/k')(1 + \omega Z_{ML}/Bk)}{(Bk^2 + \Psi - \omega Z_{FL}/k)(\omega Z_{ML}/Bk + jk'/k) - (Bk^2 - \Psi + j\omega Z_{FL}/k')(1 - \omega Z_{ML}/Bk)}$$

vereinfacht sich damit zu:

$$\zeta = \frac{(1 - jk'/k)\omega Z_{ML}/Bk + 1 + (k'/k)^2}{(1 + jk'/k)\omega Z_{ML}/Bk - 1 - (k'/k)^2} \quad \text{Reflexionsfaktor}$$

Die Biege-Impedanz Z_{ML} des Lagers ist negativ, weil die anregende Welle nach links läuft:

$$Z_{ML} = -(j\omega\Theta + W) \quad \Theta = \text{Lager-Trägheitsmoment, } W = \text{Lager-Widerstand}$$

Damit ergibt sich der komplexe Reflexionsfaktor zu:

$$\zeta = -\frac{Bk - \omega(j\omega\Theta + W)/(1 + jk'/k)}{Bk + \omega(j\omega\Theta + W)/(1 - jk'/k)}$$

Die Biegesteifigkeit B und das Lager-Trägheitsmoment Θ bilden zusammen eine Resonanz, die z.B. im mittleren Frequenzbereich liegen kann (**Abb. 2.24**). Wenn W passend gewählt wird, ist in einem schmalen Frequenzbereich Totalabsorption möglich. Derart extreme Fälle sind bei üblichen Saitenlagern zwar nicht zu erwarten, man sieht aber deutlich, dass die Biegesteifigkeit auch bei mittleren und tiefen Frequenzen Auswirkungen haben kann. \diamond

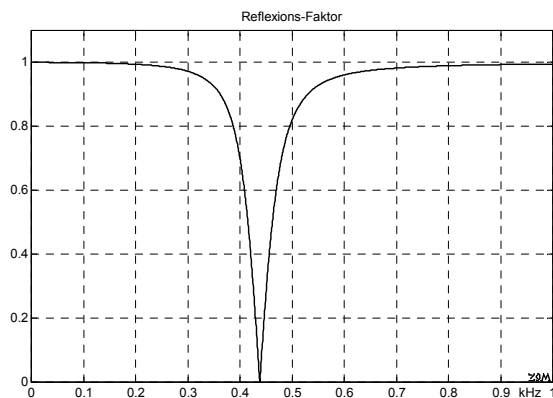


Abb. 2.24: Betrag des Reflexionsfaktors einer E₂-Saite. 46 mil, Kern- / Außendurchmesser 50% ($\kappa = 0.5$). Das Lager ist in Querrichtung unnachgiebig, weist aber für Biegebeanspruchung ein Trägheitsmoment Θ und einen Drehwiderstand W auf. $\Theta = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ kgm}^2$ entspricht der Rotationsträgheit einer Stahlkugel mit 10 mm Durchmesser. $W = 1,07 \cdot 10^{-5} \text{ Nsm}$.

Abschließend wird nochmals die Berechnung des Transmissionsfaktors ψ aufgegriffen. Bei bekannter Anregung und bekannten Lagerimpedanzen kann ψ berechnet werden; umgekehrt ist bei bekanntem ψ eine unbekannte Lagerimpedanz (vorzugsweise Z_{ML}) berechenbar. Für das in Querrichtung unbewegliche Lager ist bei biegeweicher Saite die Transmission null, die Schwingungsenergie wird komplett reflektiert. Saiten mit Biegesteifigkeit können einen Teil ihrer Schwingungsenergie aber über ein derartiges Lager hinweg übertragen (**Abb. 2.22**).

Die Berechnung des **transmittierten Anteils** geht davon aus, dass sich im Hauptteil der Saite eine Biegewelle mit der Querschnelle \underline{v} ausbreitet. Die Querschnelle am Lager $v(z=0)$ soll definitionsgemäß null sein (ideales Schneidenlager), als Kopplungsgröße wird die Winkelgeschwindigkeit $w(z=0)$ betrachtet; sie ist auf beiden Seiten des Lagers identisch. Im Hauptteil der Saite wird v durch folgende Gleichung beschrieben:

$$v(z,t) = \underline{v} \cdot \left(e^{jkz} + \zeta \cdot e^{-jkz} + \gamma \cdot e^{-k'z} \right) \quad z \geq 0$$

Die Winkelgeschwindigkeit erhält man hieraus durch örtliche Differentiation ($w = \partial v / \partial z$):

$$w(0) = jk\underline{v} \cdot (1 - \zeta + j\gamma k'/k) \quad \text{Winkelgeschwindigkeit am Lager}$$

Der hierin enthaltene Reflexionsfaktor ζ ergibt sich für das Schneidenlager ($Z_{FL} = 0$) zu:

$$\zeta = \frac{(1 - jk'/k)\omega Z_{ML}/Bk + 1 + (k'/k)^2}{(1 + jk'/k)\omega Z_{ML}/Bk - 1 - (k'/k)^2} \quad \text{Reflexionsfaktor}$$

Das ideale Schneidenlager hat keine Biegeimpedanz Z_{ML} . Die am Lager ankommende Biegewelle trifft trotzdem auf eine Biegeimpedanz, nämlich die der jenseits des Lagers ($z < 0$) weiter laufenden Saite. Diese ergibt sich zu:

$$Z_{ML} = \frac{-Bk}{\omega} \cdot \frac{1 + (k'/k)^2}{1 + jk'/k} \quad \text{Eingangsimpedanz der Restsaite}$$

Die Lagerimpedanz Z_{ML} ist negativ, weil die Anregungswelle *nach links* auf das Lager zuläuft ($z > 0$). Mit Z_{ML} vereinfacht sich der (komplexe) Reflexionsfaktor zu:

$$\zeta = \frac{-1}{1 - jk'/k} \quad \text{Reflexionsfaktor des Schneidenlagers (} z > 0 \text{)}$$

Für das Schneidenlager ist damit auch der Randfeldfaktor γ definiert:

$$\gamma = \frac{-1}{1 + jk'/k} \quad \text{Randfeldfaktor des Schneidenlagers (} z > 0 \text{)}$$

Hiermit kann die am Lager herrschende Winkelgeschwindigkeit berechnet werden: $w(0) = jk\underline{v}$. Die fortschreitende w -Welle läuft aber nicht einfach unbeeindruckt über das Lager hinweg: Direkt an der jenseitigen Lagerseite besteht $w(-0)$ aus dem ψ -Anteil der fortschreitenden Welle und dem δ -Anteil des Randfeldes. Nach kurzer Distanz ($z < 0$) ist das Randfeld aber abgeklungen, und es bleibt nur noch der ψ -Anteil der vom Lager weglaufernden (transmittierten) Welle.

Mit $w(0)$ wird nun die Restsaite im Bereich $z < 0$ angeregt (Transmissions-Anteil), hier überlagern sich weglaufernde Welle und Randfeld:

$$v(z,t) = \underline{v} \cdot \left(\psi \cdot e^{jkz} + \delta \cdot e^{k'z} \right) \quad z \leq 0$$

Auch bei $z = -0$ muss die Querschnelle $v(-0)$ null sein (Schneidenlager), deshalb gilt: $\delta = -\psi$.

Die Absolutskalierung wird mit Winkelgeschwindigkeit des Lagers $w(0)$ berechnet:

$$w(0) = jk\underline{v} = jk\underline{v}(\psi - j\delta k'/k) \quad \} \quad \psi = \frac{1}{1 + jk'/k}$$

ψ ist der komplexe **Transmissionsfaktor**; er gibt an, welcher Teil der Anregungswelle über das Lager hinaus weiterläuft. Für einen zugspannungsfreien Biegebalken ($\Psi = 0$) gilt $k'/k = 1$, der transmittierte Amplitudenanteil beträgt 71%, der transmittierte Leistungsanteil ist 50%. Die anderen 50% der Leistung werden reflektiert. Bei der Gitarrensaite überwiegt natürlich die Spannkraft Ψ , deshalb ist der reflektierte Anteil auch größer (Abb. 2.22).

Ganz ignoriert werden darf die **Biegekopplung** aber nicht, wie folgender Versuch beweist: Bei einer Halbresonanzgitarre (Gibson ES335 TD), deren Saiten nach dem Steg noch 10 cm weiter laufen (Trapez Tailpiece), wurde die E₂-Saite zwischen Steg und Saitenhalter angeklopft und in diesem Bereich gleich wieder abgedämpft. Das Saitenstück zwischen Steg und Sattel war durch diese kurze Anregung über den Steg hinweg aber auch angeregt worden und klang hörbar nach. Wenn man die Saite hingegen direkt über der Stegauflage anklopft, wird sie praktisch nicht angeregt, die Querimpedanz des Steges ist tatsächlich sehr groß.

Die Kopplungen über den Steg hinweg zeigt auch folgendes Experiment: Die Ausschwingdauer (Sustain) der ES 335 TD wurde für die E₂-Saite terzbreit ermittelt. Anschließend wurde mit dem Handballen das Saitenstück zwischen Steg und Saitenhalter bedämpft und hierfür die Ausschwingdauer (des Saitenstückes zwischen Steg und Sattel) erneut ermittelt, wobei sich nun im gesamten Frequenzbereich kürzere Ausschwingdauern ergaben.

Beide Experimente sind kein absoluter Beweis, denn die Saite liegt ja auch am Sattel auf, und auch hier könnte über Umwege eine Anregung bzw. eine zusätzliche Dämpfung erfolgt sein. Deshalb wurde ein zusätzliches Experiment auf dem **Schwingungsprüfstand** durchgeführt: Ein 0,7 mm dicker und 13,3 m langer massiver Stahldraht ist zwischen zwei pultdachförmige Lager gespannt. Ein **Laserstrahl** tastet die Transversalschnelle dieser "Saite" 4 mm vor einem der beiden Lager ab; hinter dem Lager läuft die Saite 65 mm zum Befestigungspunkt weiter (= Saitenreststück). Zwischen dem Lager und dem Lasermesspunkt wird die Saite mit einem kleinen Fallhammer impulsartig angeregt. In **Abb. 2.25** ist der zeitliche Verlauf der Querauslenkung dargestellt; einmal mit unbedämpftem Saitenreststück, daneben mit bedämpftem Saitenreststück. Die Biegekopplung ist nicht sehr stark ausgeprägt, aber offensichtlich.

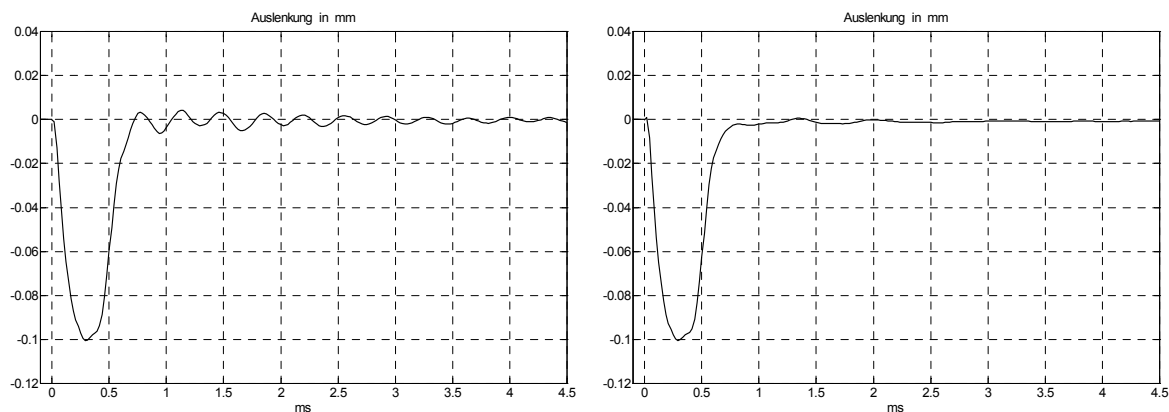


Abb. 2.25: Transversalauslenkung, ohne (links) bzw. mit (rechts) Dämpfung des Saitenreststückes. (Kap. 1.4)