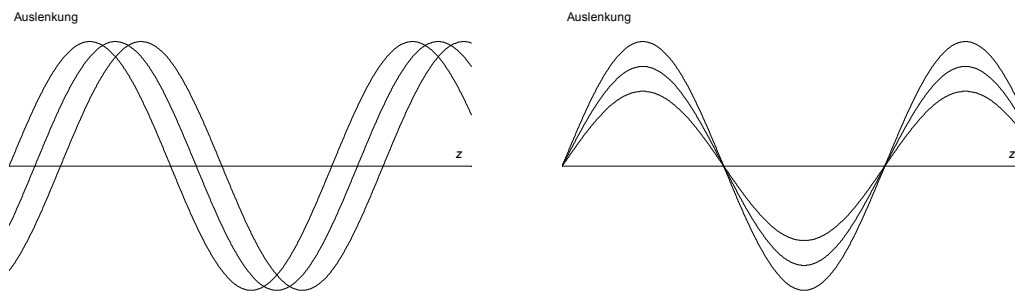


### 2.3 Stehende Wellen

Die bisher betrachteten Wellen hatten eine Ausbreitungsrichtung: Entweder nach rechts, d.h. in Richtung wachsender  $z$ -Koordinate (positive Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ ), oder nach links (negatives  $c$ ). Man nennt diese Wellen *fortschreitende Wellen* oder *Wanderwellen*. Sie transportieren reelle **Wirk-Energie**:  $E = P \cdot t = F \cdot v \cdot t$ . Bei der Überlagerung zweier energiegleicher, einander entgegenlaufender Wellen ist der Nettoenergiefluss jedoch null. Nur Blind-Energie tritt in Form von potentieller Federenergie bzw. kinetischer Massenenergie auf; der Leistungsmittelwert über ganze Schwingungsperioden ist aber null.

Bei einer Leitung, deren Ende mit einer unendlichen Lagerimpedanz  $Z$  abgeschlossen wird, kann keine Energie an das Lager abgegeben werden, weil die Lagerschnelle immer null ist:  $v = F/Z = F/\infty$ . Folglich wird die gesamte am Lager ankommende Wellenenergie reflektiert, die Amplituden der hin- und rücklaufenden Wellen müssen gleich sein. Die hierbei entstehende Überlagerung nennt man **stehende Welle**. Der Begriff gilt für jede Wellenform, ist aber bei sinusförmigen Wellen besonders anschaulich (**Abb. 2.10**): Bei der fortschreitenden Sinus-Welle bleibt die Amplitude konstant, die Phase ändert sich als Funktion der Zeit. Bei der stehenden Sinuswelle bleibt die Phase (als Funktion des Ortes) konstant, die Amplitude ändert sich über der Zeit.

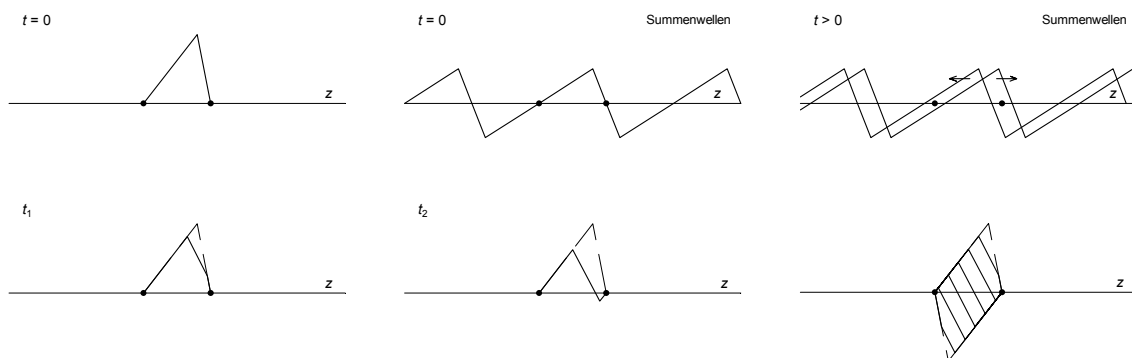


**Abb. 2.10:** Fortschreitende sinusförmige Welle (links), stehende sinusförmige Welle (rechts). Über der Ortskoordinate ( $z$ ) ist die Auslenkung zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten dargestellt.

In der Literatur werden Leitungswellen häufig sinusförmig beschrieben. Bei Gitarrensaiten ist aber (zumindest beim Anschlag) die **Dreieckform** vorzufinden. An der Anschlagstelle wird die Saite durch eine Querkraft ausgelenkt, für einen Moment stellt sich (näherungsweise) eine dreieckförmige Saitenauslenkung ein. Sobald der Kontakt zwischen Plektrum (bzw. Finger) und Saite abreißt, laufen zwei Dreieckswellen in entgegengesetzte Richtungen auseinander, werden an den Saitenlagern reflektiert, und bilden als Summe aller Reflexionen eine stehende Welle. Anstelle der Reflexionen können auch **Spiegelwellen** (siehe vorhergehendes Kapitel) definiert werden, die ungehindert über die Lagerpunkte hinweglaufen (ohne Reflexion). Als **Randbedingungen** sind in diesem Modell einzuhalten: Die dreieckförmige Anregungsform zum Zeitpunkt  $t = 0$ , und die idealisierten Lagerbedingungen  $\xi \equiv 0$ . Unter der vereinfachenden Annahme verlustfreier Ausbreitung und Reflexion wird jede Welle unendlich oft reflektiert; es sind folglich unendlich viele Spiegelwellen erforderlich, die aber alle mit betragsmäßig gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit über die Saite laufen. Alle mit positivem  $c$  laufenden Wellen können zu *einer* nach rechts laufenden Summenwelle zusammengefasst werden (überlagert werden), und ebenso können alle nach links laufenden Wellen zusammengefasst werden, so dass die stehende Welle durch zwei in unterschiedliche Richtungen laufende Summenwellen beschreibbar ist.

Da in diesem Modell von dispersionsfreier Ausbreitung ausgegangen wird, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  nicht von der Frequenz abhängig. Der zeitliche Abstand zweier in gleicher Richtung (!) stattfindender Reflexionen desselben Ereignisses beträgt folglich für alle Spektralanteile  $T = 2l/c$ . Hierbei ist  $l$  die Saitenlänge, die zweimal durchlaufen werden muss, bis beispielsweise am rechten Lager die nächste Reflexion erfolgt. Bei bekannter Anregungs-Ortsfunktion sind damit die Summenwellen leicht beschreibbar: Ihre örtliche Periode ist doppelt so lang wie die Saite, die Auslenkungs- und die Schnelle-Ortsfunktion sind punktsymmetrisch zum Lager. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind die beiden Summenwellen identisch, laufen aber für  $t > 0$  in entgegengesetzte Richtungen auseinander. Der Terminus **Summenwelle** meint die Summe aller *in dieselbe Richtung* laufenden Wellen. Die nach rechts laufende Summenwelle muss zu der nach links laufenden Summenwelle addiert werden, um die tatsächliche Saitenwelle zu erhalten.

**Abb. 2.11** zeigt eine Saite, die zwischen ihren Lagerpunkten dreieckförmig ausgelenkt wird. Die obere Zeile beginnt links mit dem Startzustand. Rechts daneben sind die beiden Summenwellen dargestellt, aus denen man sich die Auslenkung zusammengesetzt denken kann; zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind beide Summenwellen identisch, deshalb ist nur *eine* Kurve zu erkennen. Im rechten Bild ist ein späterer Zeitpunkt dargestellt, die Summenwellen sind jetzt schon ein kleines Stück auseinandergelaufen. Ihre Überlagerung (zweite Bildzeile) ergibt den tatsächlichen Verlauf der Auslenkung, die an den Lagerpunkten definitionsgemäß immer null sein muss (unnachgiebiges Lager). Im rechten Bild der unteren Bildzeile sind mehrere aufeinanderfolgende Zeitpunkte der Wellenausbreitung dargestellt.



**Abb. 2.11:** Ausbreitung einer dreieckförmigen Auslenkungswelle. Die unnachgiebigen Saitenlager sind als Punkte markiert. Die Welle pendelt in Zickzackform zwischen den gestrichelten Endpositionen hin und her.

Saitenschwingungen werden in Büchern häufig sinusförmig dargestellt, ähnlich den Bildern in Abb. 2.10; dabei handelt es sich aber um monofrequente Sonderfälle. Die Auslenkungsform der Saite ist im Moment der Anregung jedoch dreieckförmig, wie in Abb. 2.11 dargestellt. Die Saite schwingt zickzackförmig hin und her, im Verlauf der Zeit ändert sich aber die Wellenform: Die über der Frequenz zunehmende Dämpfung verrundet die Form, zusätzlich tritt Dispersion auf (hohe Frequenzen laufen mit größerer Ausbreitungs-Geschwindigkeit). Diese Formänderungen werden hier nicht erfasst, Abb. 2.11 zeigt das grundsätzliche Verhalten vereinfacht. Nicht berücksichtigt bleibt auch die Schwingungsebene: Die Saitenschwingung ist eine räumliche Bewegung, an den Lagern kommt es zu Drehungen der Polarisationssebene. Auch wenn die Saite z.B. exakt griffbrettnormal angezupft wird, entsteht doch im Lauf der Zeit eine zusätzliche griffbrettparallele Komponente.

Aus der in Abb. 2.11 dargestellten Ortsfunktion der Auslenkung können die Ortsfunktionen der Schnelle und der Kraft, aber auch deren Zeitfunktionen abgeleitet werden. Die Schnelle ist Anregungsgröße des Magnettonabnehmers, die Kraft ist die auf die Lager einwirkende Größe, die z.B. von piezoelektrischen Tonabnehmern verarbeitet wird. Es wurde schon gezeigt, dass die Schnelle durch örtliches Differenzieren der Auslenkung entsteht – dies gilt aber nur für fortschreitende, nicht für stehende Wellen. In die folgende Gleichung muss die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  mit Vorzeichen eingesetzt werden; für nach links laufende Wellen definitionsgemäß negativ, so dass  $-c$  positiv wird.

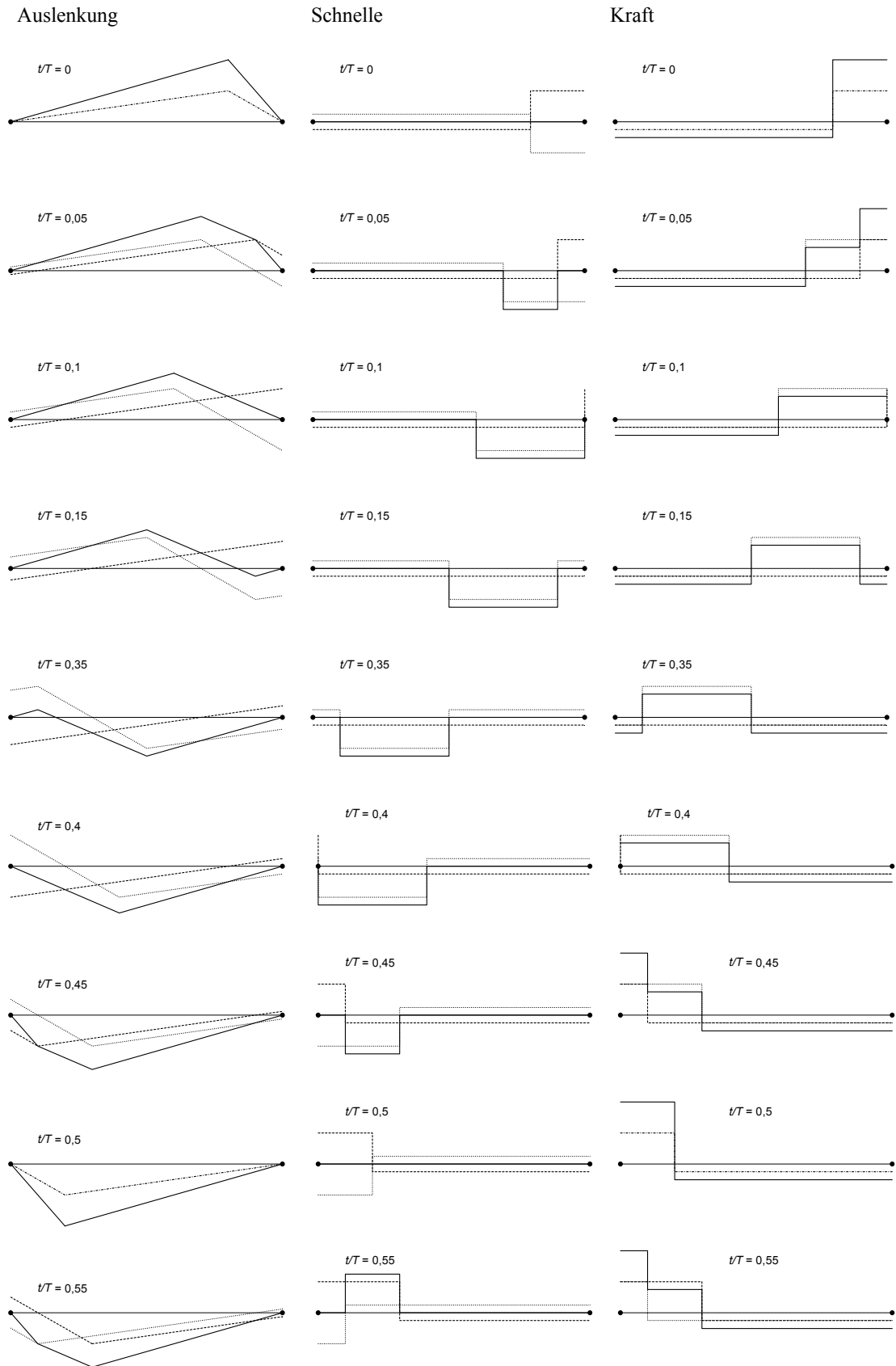
$$v(z)|_{t=t_0} = -c \cdot \left. \frac{d\xi(z)}{dz} \right|_{t=t_0} \quad \text{Ortsfunktion: Auslenkung} \rightarrow \text{Schnelle}$$

Die stehende Welle ist also – wie in Abb. 2.11 gezeigt – in zwei Summenwellen zu zerlegen; jede dieser Summenwellen wird örtlich differenziert und mit  $-c$  multipliziert. Das Ergebnis ist für die dreieckförmige Anregung in Abb. 2.12 dargestellt. Die dreieckförmige Auslenkung schwingt nicht etwa auf und ab, vielmehr läuft eine Zickzackwelle zwischen den dreieckförmigen Grenzpositionen hin und her. Die Schnelle hat die Form eines Rechteckimpulses, der an den Lagern gegenphasig reflektiert wird. Auch die Kraftwelle hat Rechteckform, wird aber gleichphasig reflektiert. Bei allen drei Ortsfunktionen handelt es sich um stehende Wellen, die aus je zwei Summenwellen zusammengesetzt sind. Bei den Summenwellen ist eine einfache Umrechnung ( $\xi \leftrightarrow v \leftrightarrow F$ ) möglich, bei den daraus zusammengesetzten tatsächlichen Funktionen (stehenden Wellen) ist nur zwischen Auslenkung und Kraft ein einfacher Zusammenhang feststellbar:  $F = -\Psi \cdot \partial\xi / \partial z$ .

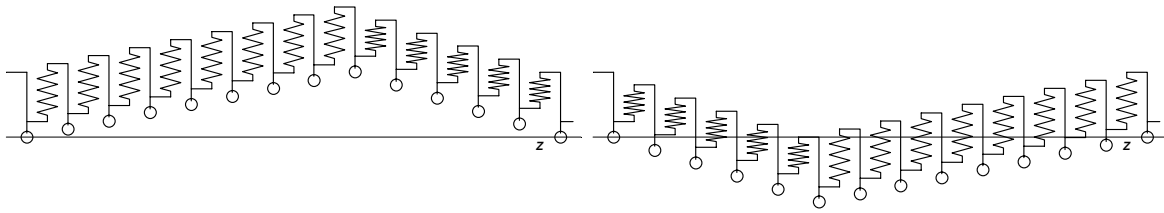
Um die Ortsfunktion der Kraft zweifelsfrei der Auslenkung zuordnen zu können, ist in Abb. 2.13 nochmals das Feder-Masse-Modell dargestellt. Hiermit ist für zwei Zustände sehr schön die dreieckförmige Auslenkung und die rechteckförmige (Feder-) Kraftverteilung zu sehen.

Nachdem nun die Ortsfunktionen bekannt sind, können die Zeitfunktionen bestimmt werden. Wiederum gilt: Die Summen-Ortsfunktionen lassen sich mit wenig Aufwand in die Summen-Zeitfunktionen umgewandelt werden; bei den stehenden Wellen ist dies nicht direkt möglich. Als erstes wird die Lagerkraft betrachtet, die sich aus zwei einander entgegenlaufenden Summenwellen zusammensetzt. Die Startbedingung ( $v \equiv 0$ ) erzwingt, dass die beiden Summenwellen  $F(z)$  zum Startzeitpunkt ( $t = 0$ ) identische Form haben; die Lagerbedingung ( $\xi = 0$ ) erzwingt bezüglich des Lagers einen ungeraden (punktsymmetrischen) Verlauf der Auslenkung  $\xi(z)$  bzw. wegen der Differentiation einen geraden (achsensymmetrischen) Verlauf der Kraft  $F(z)$ . Da sich die beiden achsensymmetrischen Kraft-Summenwellen mit betragsmäßig gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  auf das Lager zubewegen, ist die Lagerkraft zu jedem Zeitpunkt doppelt so groß wie die am Lager wirkende Kraft einer einzelnen Summenwelle. Aus der Ortsfunktion einer Kraftsummenwelle lässt sich somit durch einfache Argumenttransformation ( $z = ct$ ) die Zeitfunktion der Lagerkraft bestimmen (Abb. 2.14).

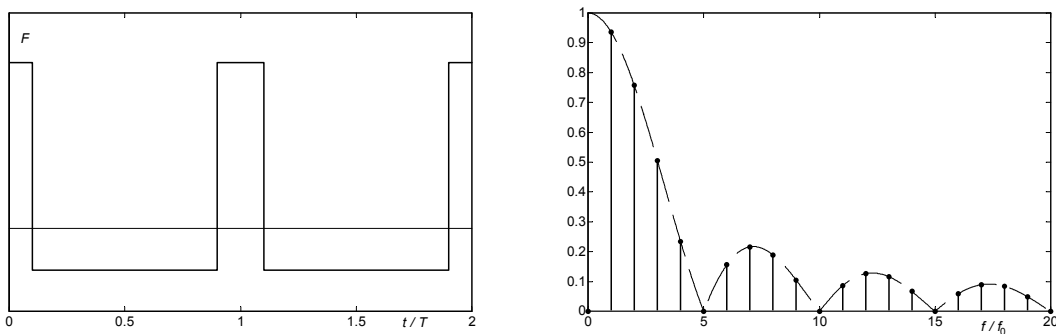
Zur periodischen Zeitfunktion der Lagerkraft gehört ein diskretes harmonisches Linienspektrum mit der Grundfrequenz  $f_0 = 1/T$ ; hierbei ist  $T = 2l/c$  die zeitliche Periode. Die spektrale Hüllkurve ist eine si-Funktion [ $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ ], ihre Nullstellen ergeben sich aus dem örtlichen Teilungsverhältnis der Auslenkung: Eine Saitenteilung im Verhältnis 4:1 löscht den 5. Teilton aus.



**Abb. 2.12:** Dreieckswelle: Ortsfunktionen zu 9 verschiedenen Zeitpunkten ( $T =$  Periodendauer). Das Schnelle-  
 rechteck wird gegenphasig reflektiert, das Kraftrechteck gleichphasig. Ausbreitungsrichtung:  $\text{-----}\rightarrow$ ,  $\leftarrow\text{-----}$ .

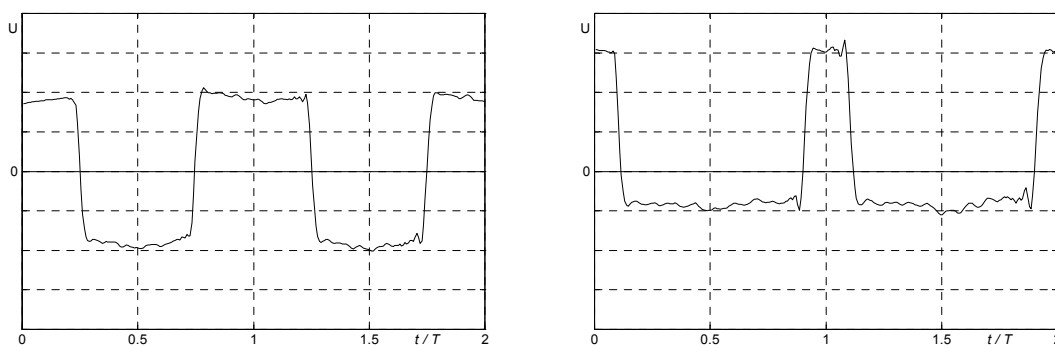


**Abb. 2.13:** Dreieckswelle: Feder-Masse-Modell (vergl. Abb. 2.6). Aus der Deformation der Federn kann auf die Ortsfunktion der Kraft geschlossen werden. Im linken Bild ist die Kraft links vom Knick negativ, rechts davon positiv (Vorzeichenkonvention: Druckspannung = positives Vorzeichen). Im rechten Bild ist die Kraft links vom Knick positiv, rechts davon negativ.



**Abb. 2.14:** Zeitfunktion und Betragsspektrum der Lagerkraft; dreieckförmige Auslenkung ähnlich Abb. 2.12. Der zeitliche Kraftverlauf ist mittelwertfrei, der Gleichanteil im Spektrum ist deshalb null. Wenn die Distanz zwischen Sattel und Anzupfpunkt  $1/5$  der Saitenlänge beträgt (linkes Bild), werden ganzzahlige Vielfache der fünffachen Grundfrequenz ausgelöscht.

In **Abb. 2.15** ist das Ergebnis einer Spannungsmessung dargestellt. Hierzu wurde die  $E_4$ -Saite einer Ovation (EA-86) mit einem Plektrum angezupft, als Sensor diente der im Steg eingebaute Piezo-Tonabnehmer. Der Spannungsverlauf ist grundsätzlich rechteckig, die überlagerten Schwingungen sind Auswirkungen der dispersiven Wellenausbreitung. Der Piezo-Tonabnehmer kann vereinfacht als Kraft-Spannungs-Wandler interpretiert werden, der die im Steg wirkenden Wellenkräfte in eine hierzu proportionale elektrische Spannung umwandelt. Das Tastverhältnis der Rechteckschwingung entspricht dem Saiten-Teilverhältnis (32:32, 51:13).



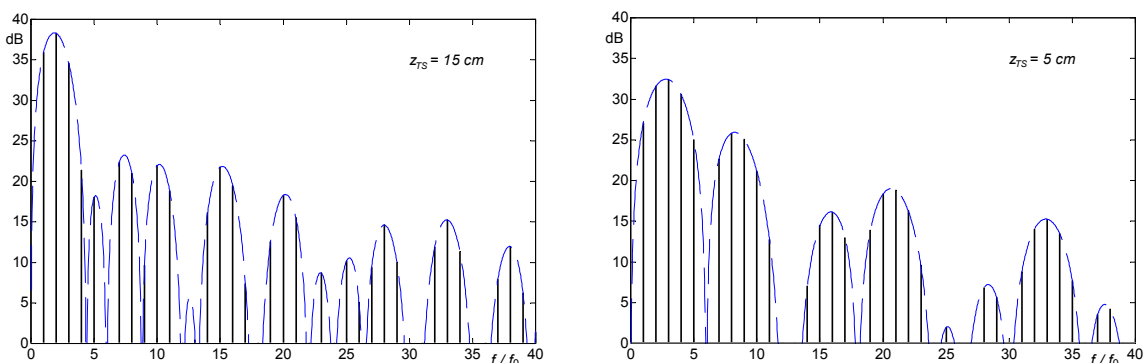
**Abb. 2.15:** An einem im Steg eingebauten Piezotonabnehmer gemessene elektrische Spannung. Der grundsätzliche Verlauf ist rechteckförmig – Ursache der Schwingungen sind Resonanzen und dispersive Wellenausbreitung. Anzupfpunkt-Steg = 32cm (links), = 13cm (rechts); Saitenlänge = 64 cm.

Die tatsächliche **Saitenschnelle** ist zum Anzupfzeitpunkt (der bei  $t = 0$  angenommen wird) für alle Saitenpunkte null – die Saite startet ausgelenkt, aber in Ruhe. Hieraus folgt für die beiden Summenwellen ein entgegengesetztes Vorzeichen:  $v_R(z, t=0) = -v_L(z, t=0)$ . Der Index kennzeichnet hierbei die Laufrichtung, R = rechtslaufend, L = linkslaufend. Zusätzlich ist an jedem (unbeweglich angenommenen) Lager die tatsächliche Schnelle immer null, die Summenwellen müssen deshalb zueinander für  $t = 0$  punktsymmetrisch sein. Somit gilt für alle Zeiten:  $v_R(z, t) = -v_L(-z, t)$ . Aus beiden Bedingungen folgt, dass beide Summenwellen für  $t = 0$  gerade Funktionen sind:  $v_R(z, t=0) = v_R(-z, t=0)$ ,  $v_L(z, t=0) = v_L(-z, t=0)$ .

Bei der Elektrogitarre ist die Saitenschnelle die Eingangsgröße des **Magnettonabnehmers**. Die Ermittlung des Spektrums ist komplizierter als beim Piezotonabnehmer, weil Schnellessensoren nicht am Steg wirken können. Typischerweise ist ein Magnettonabnehmer 3 – 15 cm vom Steg entfernt unter der Saite befestigt; diese Distanz wird  $z_{TS}$  genannt, die hierfür benötigte Laufzeit ist  $\tau_{TS}$ . Von der dreieckförmigen Saitenauslenkung bis zur Saitenschnelle über dem Tonabnehmer sind mehrere Transformationen nötig: Die tatsächliche Auslenkung wird in zwei Summenwellen zerlegt, örtliches Differenzieren ergibt die Ortsfunktion der Schnelle, eine Argumenttransformation ( $z = z_0 - ct$ ) macht aus der Orts- die Zeitfunktion, die zeitliche Verzögerung  $\tau_{TS}$  entspricht im Frequenzbereich einer Phasendrehung. Am Steg setzt sich die tatsächliche Schnelle aus zwei Komponenten zusammen, die aufgrund der o.a. Symmetrien immer null ergeben:  $v_\Sigma(t) = v(t) - v(t)$ . An der Stelle des Tonabnehmers muss die Laufzeit mit unterschiedlichen Vorzeichen berücksichtigt werden:  $v_\Sigma(t) = v(t + \tau_{TS}) - v(t - \tau_{TS})$ . Für den Frequenzbereich ergibt sich hieraus mit dem Verschiebungssatz der Fouriertransformation:

$$\underline{V}_\Sigma(j\omega) = \underline{V}(j\omega) \cdot e^{j\omega\tau} - \underline{V}(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} = \underline{V}(j\omega) \cdot 2j \cdot \sin(\omega\tau) \quad \text{mit } \tau = \tau_{TS} = z_{TS}/c$$

Hierbei ist  $\underline{V}_\Sigma(j\omega)$  das Schnellespektrum der Saite am Ort des Tonabnehmers, das aus dem Schnellespektrum  $\underline{V}(j\omega)$  einer Summenwelle durch Multiplikation mit einer Sinusfunktion entsteht. Die Schnelle-Summenwelle hat ein diskretes, harmonisches Linienspektrum, die Nullstellen der si-förmigen spektralen Hüllkurve werden wie bei der Lagerkraft vom Anzupfport bestimmt. Dieses Spektrum muss mit der o.a. Sinusfunktion multipliziert werden, deren Nullstellen von der Position des Tonabnehmers bestimmt werden. **Abb. 2.17** zeigt für eine E<sub>2</sub>-Saite die Schnelle-Spektren. In Abhängigkeit von Tonabnehmer- und Anzupfport ergibt sich eine charakteristische, klangbestimmende Hüllkurve.



**Abb. 2.17:** Pegel-Spektrum der tatsächlichen Saitenschnelle am Ort des Tonabnehmers. Der Anzupfport ist 11 cm vom Steg entfernt, der Tonabnehmer 15 cm (links) bzw. 5 cm (rechts); Saitenlänge = 66 cm.  $f_0 = 82,4$  Hz.