2. Die Saite als Leitung

In der Terminologie der Systemtheorie ist eine **Leitung** ein spezieller Übertragungskanal, der Signale von der Quelle zum Empfänger (zur Senke) überträgt. Bei der E-Gitarre denkt man im Zusammenhang mit Leitung wohl zuallererst an das Gitarrenkabel. Aber obwohl auch dieses im o.a. Sinne elektrische Signale von der Gitarre zum Verstärker leitet, ist zu seiner Funktionsbeschreibung nicht die allgemeine Leitungstheorie erforderlich. Im Falle kurzer Leitungen ist nämlich eine Vereinfachung auf konzentrierte Leitungselemente ausreichend. Das Gitarrenkabel ist eine kurze Leitung – kurz gegenüber der *elektrischen* Wellenlänge, die größer als 30 km ist. Die Leitungstheorie soll vor allem lange Leitungen beschreiben; Leitungen, deren Abmessungen der Wellenlänge entsprechen (oder länger als diese sind). In diesem Sinne ist die **Gitarrensaite** eine lange *mechanische* Leitung: Quelle der sich ausbreitenden mechanischen Welle ist der Ort, an dem die Saite angezupft wird. Empfänger des über die Saite geleiteten Signals ist der Steg, der einen Teil der ankommenden Signalenergie auskoppelt und in den Korpus weiterleitet; die restliche Signalenergie wird als Reflexion in die Saite zurückgeschickt. Auch der Sattel reflektiert, wodurch sich auf der Saite eine **stehende Welle** ausbildet.

Ursache aller im Tonabnehmer erzeugten Musik-Signale sind **Saitenschwingungen**; ihrer Beschreibung gilt der folgende Teil. Dass ein Tonabnehmer auch Störsignale erzeugen kann, wird an anderer Stelle genauer untersucht (Kap. 5.7). Die Gitarrensaite ist ein mechanisches System, das streng genommen in komplizierter Weise nichtlinear reagiert, aber vereinfachend als linear und zeitinvariant angenommen wird. Unter diesen Randbedingungen lassen sich als **Systemgrößen** Massen, Steifigkeiten und Widerstände definieren, und an diesen angreifend die **Signalgrößen** Kraft und Schwinggeschwindigkeit = Schnelle. Die örtlichen Verteilungen der Signalgrößen laufen als **Welle** mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c die Saite entlang. Ganz ähnliche Verhältnisse ergeben sich auf elektrischen Leitungen: Ihre Systemgrößen sind Kapazitäten, Induktivitäten und Widerstände, ihre Signalgrößen Strom und Spannung. Aufgrund der analogen mathematischen Beschreibung werden im Folgenden mechanische und elektrische Leitungen gegenübergestellt. Die mechanische Leitung ist die Gitarrensaite; die hierzu analoge elektrische Leitung soll als **Modell** zur Veranschaulichung dienen – sie existiert nicht wirklich, und ist insbesondere nicht das Gitarrenkabel!

2.1 Transversalwellen

Auf einer mechanischen Leitung breiten sich mechanische Wellen aus. Diese können Longitudinalwellen, Transversalwellen, oder Kombinationen hiervon sein. Bei der reinen Transversalwelle schwingen die differentiell kleinen Leitungsteilchen quer zur Richtung der Wellenausbreitung; entweder als ebene Bewegung, oder drehend. Bei einer reinen Longitudinalwelle schwingen die Leitungsteilchen in Richtung ihrer Ausbreitung; bei der Gitarrensaite also in Richtung der Saitenachse – gegenüber der Transversalwelle eher von untergeordneter Bedeutung. Bei der einfachen elektrischen Leitung entsteht zwischen zwei parallelen Leitern

(Drähten) ein elektromagnetisches Feld; *in* den Leitern fließen Ströme, *zwischen* den Leitern entstehen Potentialdifferenzen, also elektrische Spannungen. Die elektrische Leitungstheorie unterscheidet verschiedene Leitergeometrien – dies ist für die hier anstehenden grundsätzlichen Betrachtungen aber nicht erforderlich.

Was sich als Welle längs der Leitung mit c ausbreitet, ist die örtliche Verteilung von Signalgrößen. Bei der mechanischen Leitung ist eine Signalgröße die **Kraft** F, die als Funktion des Ortes und der Zeit definiert wird: $F(z,t)$. Dabei ist z die Ortskoordinate in Saitenlängsrichtung, t ist die Zeit. Hier liegt bereits ein erster Grund für mögliche Missverständnisse: Gemeint ist nicht die Saitenspannkraft Ψ, sondern die Wellenkraft F. Beim Stimmen der Saite wird in Saitenlängsrichtung eine Saitenspannkraft Ψ aufgebracht, die nach vollendetem Stimmen (idealisiert) konstant bleibt. Zusätzlich entsteht beim Anzupfen der Saite in Querrichtung eine **Querkraft**; diese ist mit F gemeint. Außer der örtlichen und zeitlichen Kraftverteilung ist zur Beschreibung der sich ändernden Geometrie auch noch eine Bewegungsgröße erforderlich. Grundsätzlich wird hierbei die Verteilung der **Quergeschwindigkeit** betrachtet, die durch Differentiation in eine Beschleunigung, und durch Integration in eine Auslenkung umgeformt werden kann. Um Verwechslungen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c zu vermeiden, die ja eine signal<u>un</u>abhängige Konstante ist, wird diese Signalgeschwindigkeit **Schnelle** $v(z,t)$ genannt. Damit sind die beiden signaltragenden **Wellengrößen** die Kraft $F(z,t)$ und die Schnelle $v(z,t)$. Bei der wichtigeren Transversalwelle verläuft ihre Richtung quer zur Saitenachse, bei der Longitudinalwelle parallel hierzu.

Beide Wellengrößen sind nicht direkt beobachtbar. Auch wenn man sieht, *dass* eine Saite schwingt: Es ist unmöglich zu sagen, ob die Schnelle 1 m/s oder 5 m/s beträgt. Hingegen ist die Auslenkung abschätzbar – zumindest bei ausreichend starker Anregung. Am leichtesten zu interpretieren sind deshalb grafische Darstellungen der **Auslenkung**, die häufig x oder ξ genannt wird. Nun ist aber ξ vom Ort *und* von der Zeit abhängig: $\xi(z,t)$. Diese Funktion könnte durch ein räumliches z,t,ξ-Koordinatensystem dargestellt werden, mit ξ als Höhe über der z,t-Ebene. Schnitte längs $t = t_0 = const$ ergeben dann eine Ortsfunktion $\xi(z,t_0)$, Schnitte längs $z = z_0 = const$ ergeben eine Zeitfunktion $\xi(z_0,t)$. Die **Ortsfunktion** ist eine Momentaufnahme, in der die örtliche Verteilung der Auslenkung zu *einem* Zeitpunkt dargestellt wird. Die **Zeitfunktion** zeigt den zeitlichen Verlauf der Auslenkung *eines* speziellen Saitenpunktes. Räumliche Darstellungen über einer z,t-Ebene haben aber den großen Nachteil, dass die Zeit t eben gerade *keine* Raumkoordinate ist. Bei allgemeiner Definition des Begriffes "Raum" ist das kein Problem, für Grundlagenbetrachtungen aber etwas unanschaulich. Problematisch wird hingegen die "Vereinfachung" von $\xi(z,t_0)$ zu $\xi(z)$ = Ortsfunktion, und von $\xi(z_0,t)$ zu $\xi(t)$ = Zeitfunktion. Zwar sind t_0 und z_0 jeweils konstante Größen, aber es handelt sich bei $\xi(z)$ und $\xi(t)$ um zwei verschiedene Funktionen – die nicht mit demselben Buchstaben ξ benannt werden sollten. Um die Unterscheidung zu erleichtern, wird zunächst für die Auslenkungs-Zeitfunktion $\xi_{ZF}(t) = \xi(z_0,t)$ geschrieben, und für die Auslenkungs-Ortsfunktion $\xi_{OF}(t) = \xi(z,t_0)$.

In **Abb. 2.1** ist für drei verschiedene Wellenformen die Ortsfunktion der Auslenkung zu 7 verschiedenen Zeiten dargestellt. In jedem der drei Bilder läuft eine Transversalwelle von rechts nach links. Im Gegensatz zur realen Saite ist die in Abb. 2.1 dargestellte Wellenausbreitung nicht-dispersiv, d.h. die Welle behält ihre Form. Bei der realen Saite erfolgt die Ausbreitung hingegen mit frequenzabhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeit (**Dispersion**), die Welle ändert während der Ausbreitung ihre Form, weil sich höhere Frequenzen mit größerer Geschwindigkeit ausbreiten. Für einführende Betrachtungen darf die Dispersion vernachlässigt werden, bei genauen Analysen ist sie zu berücksichtigen, indem die Ausbreitungsgeschwindigkeit c nicht als Konstante, sondern frequenzabhängig angesetzt wird.

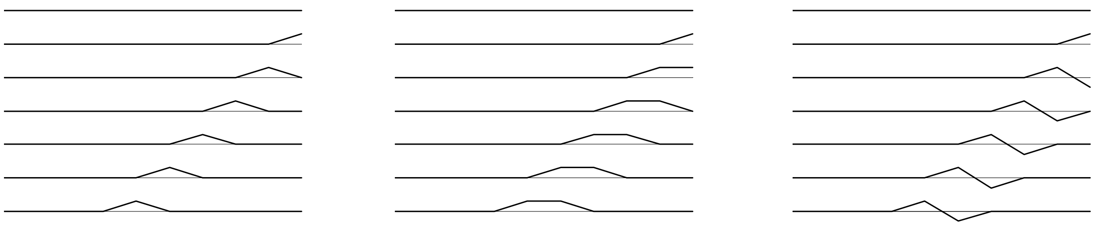


Abb. 2.1: Transversalwellen. Jede Zeile zeigt die Querauslenkung der Saite zu einem Zeitpunkt. Die Welle schreitet (in jedem der drei Bilder) von rechts nach links fort, tiefer liegende Zeilen zeigen spätere Zeitpunkte. Am rechten Bildrand erfolgt eine kurz dauernde Quer-Anregung, die eine mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit nach links laufende Welle erzeugt. Die drei Bilder zeigen drei unterschiedliche Anregungsfunktionen.

Im Folgenden ist mit $\xi = \xi_{OF}(z)$ die analytische Darstellung einer **Funktion** gemeint; ihre entsprechende grafische Darstellung zeigt (für ein spezielles Beispiel) **Abb. 2.2**. Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem **Argument** z eindeutig einen **Funktionswert** ξ zuordnet. Anstelle von zuordnen spricht man auch von abbilden, und so betrachtet ist eine Funktion auch eine **Abbildung**: Die Menge der z-Punkte wird auf die Menge der ξ-Punkte abgebildet.

Die **Transformation** ist auch eine Abbildung, denn auch hier werden Mengen aufeinander abgebildet. Im Folgenden ist der Begriff Transformation (spezialisierend) so definiert, dass er die Verschiebung der $z\xi$-Ebene beschreibt. Jeder Punkt dieser Ebene wird ja durch ein Wertepaar beschrieben; der Ursprung z.B. durch $z = 0$, $\xi = 0$. Wenn wir jeden Punkt der $z\xi$-Ebene um dieselbe Distanz in dieselbe Richtung verschieben, führen wir eine spezielle Transformation durch, die in diesem Fall **Verschiebung** oder **Translation** genannt wird. Die analytische Geometrie der Ebene spricht hier von einer *Parallelverschiebung der Ebene in sich*, die zur Klasse der gleichsinnigen **Kongruenzabbildungen** gehört.

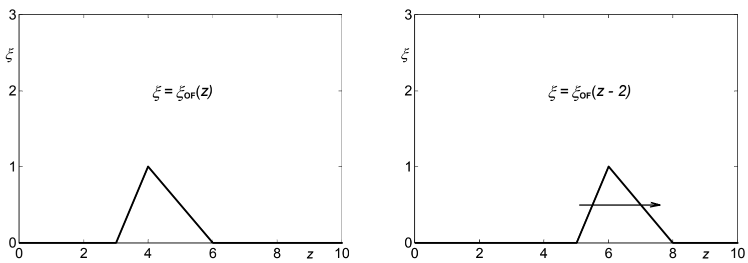


Abb. 2.2: Grafische Darstellung der Funktion $\xi = \xi_{OF}(z)$. Durch Anwendung der Transformation wird der Funktionsgraph in positiver z-Richtung verschoben.
Rechtes Bild: $ct = 2$.

Funktionen, Abbildungen und Transformationen sind Zuordnungsvorschriften; für die folgenden Betrachtungen wurde folgende Begriffsspezialisierung vorgenommen: Die z-ξ-Zuordnung wird *Funktion* genannt, die Verschiebung aller z,ξ-Punkte, die zu einer Verschiebung des Funktionsgraphen (der Funktionskurve) führt, ist eine *Transformation*. Besondere Bedeutung hat die Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der z-Koordinate (Abszisse), denn dies ist die Achse (Längsrichtung) der Saite, und in dieser Richtung laufen elastische Wellen die Saite entlang. Die Auslenkungs-Ortsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Ort z und der Auslenkung ξ. Bei der Saite gehört für einen speziellen Zeitpunkt zu jedem z ein eindeutiges ξ. Der Funktionsgraph, analytisch beschrieben durch $\xi = \xi_{OF}(z)$, ist ein Abbild der Saitenauslenkung.

In Abhängigkeit von der sich ändernden Zeit t verändert der Funktionsgraph seine Lage; er verschiebt sich längs z. Diese Verschiebung ist – mathematisch gesehen – eine zeitabhängige

Transformation (speziell: Translation). Sie wird entweder Koordinaten-Transformation oder **Argument-Transformation** genannt, weil die Transformationsvorschrift nur das Funktions-Argument z verändert. Alle Funktionswerte (ξ) bleiben erhalten; sie werden durch die Transformation aber neuen z-Werten zugeordnet.

$$\xi = \xi_{\mathrm{OF}}(z - ct_0) \qquad \text{zeitabhängige Translation}$$

Die Transformation verändert das Argument der Funktion: Aus z wird $z - ct_0$. Hierbei ist c die **Ausbreitungsgeschwindigkeit**♣ der Welle, und ct_0 der während der Zeit t_0 zurückgelegte Weg. Man kann $\xi_{\mathrm{OF}}(z)$ als Ortsfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ interpretieren, und $\xi_{\mathrm{OF}}(z - ct_0)$ als Ortsfunktion zum (anderen) Zeitpunkt t_0. Der mit $\xi_{\mathrm{OF}}(z)$ definierte Funktionsgraph wird durch die Transformation in z-Richtung verschoben: Sofern c positiv ist, nach rechts, für negatives c nach links. Neben der Ortsfunktion, bei der die Auslenkung zu einem festen Zeitpunkt t_0 als Funktion des Ortes beschrieben wird, kann auch die Zeitfunktion betrachtet werden, bei der die Auslenkung für einen festen Ort z_0 als Funktion der Zeit beschrieben wird. Ist eine der beiden Funktionen bekannt, kann die andere hieraus berechnet werden.

In **Abb. 2.3** ist als Beispiel eine dreieckförmige Ortsfunktion $\xi_{\mathrm{OF}}(z)$ dargestellt. Der Ort (z) wird bezüglich des speziellen Saitenpunktes $z_0 = 8$ neu definiert: $z = z_0 - ct$. Dieser Substitution liegt die Überlegung zugrunde, dass es für die Berechnung keinen Unterschied macht, ob die Welle zu dem Punkt z_0 hinläuft, oder ein Beobachter vom Punkt z_0 aus der Welle entgegenläuft. Aus $\xi_{\mathrm{OF}}(z_0 - ct)$ wird die neue Funktion $\xi_{\mathrm{ZF}}(t)$, die aus $\xi_{\mathrm{OF}}(z)$ durch Argument-Transformation hervorgeht: $\xi_{\mathrm{OF}}(z) \;\Leftrightarrow\; \xi_{\mathrm{ZF}}(t)$. Allgemeiner: **Die Ortsfunktion wird durch Argument-Transformation zur Zeitfunktion, und umgekehrt**. ξ_{OF} und ξ_{ZF} haben einen ähnlichen Verlauf, sind aber nicht identisch.

Für positives c (nach rechts laufende Welle) geht die eine Funktion aus der anderen durch horizontale Streckung, Spiegelung an der Ordinate und horizontale Verschiebung hervor. Obwohl auch andere Abbildungsschritte definierbar sind, sollen diese drei Teilabbildungen betrachtet werden: Die horizontale (in Abszissenrichtung ausgeführte) Streckung weist der Abszisse eine neue Skalierung zu: Aus dem Ort wird die Zeit, bzw. umgekehrt ($z = ct$). Die Spiegelung ergibt eine Umkehr der Abszissenrichtung. Zu beiden Teilabbildungen könnte man auch sagen: Streckung mit negativem Koeffizient. Die in Abszissenrichtung gestreckte und gespiegelte Kurve wird abschließend noch in Abszissenrichtung verschoben, und aus einer Ortsfunktion wurde eine Zeitfunktion (oder umgekehrt). Bei der nach links laufenden Welle (negatives c) entfällt die Spiegelung, d.h. die Abszissenrichtung wird nicht umgekehrt. Abb. 2.3 handelt es sich in beiden Bildern um Auslenkungsfunktionen; der Funktionalzusammenhang zwischen Abszisse und Ordinate ist aber unterschiedlich.

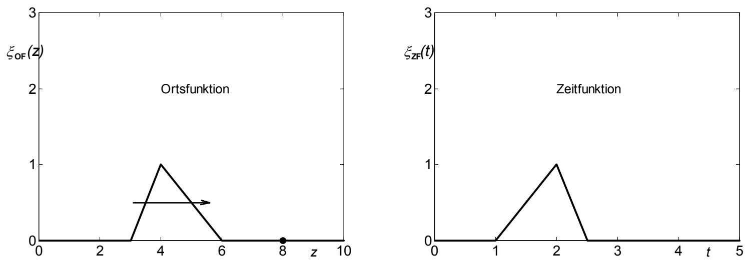


Abb. 2.3: Orts- und Zeitfunktion. Die Welle läuft nach rechts auf den Punkt $z_0 = 8$ zu; die Auslenkung dieses Punktes ist in der Zeitfunktion dargestellt. Physikalische Einheiten siehe Text.

♣ In der Literatur findet man auch Gleichungen, die grundsätzlich von positivem c ausgehen, und – je nach Ausbreitungsrichtung – ein Plus- oder Minuszeichen schreiben.

In den Abbildungen 2.2 und 2.3 haben die Variablen keine physikalischen Einheiten – für mathematische Darstellungen nicht ungewöhnlich. Man könnte **Einheiten** hinzufügen, oder die Ortskoordinate z normiert interpretieren: Z.B. auf 1 m normiert; dann bedeutet $z_0 = 8$ eigentlich: $z_0 = 8\,\text{m}$. Nimmt man ergänzend an, dass die Zeit t auf 1 s normiert ist, dann beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit für dieses Beispiel: $c = z/t = 2\,\text{m/s}$.

In Abb. 2.3 ist es egal, ob die Welle (linkes Bild) mit 2 m/s auf den am festen Punkt $z_0 = 8$ stehenden Beobachter zuläuft, oder ob ein Beobachter, ausgehend von $z_0 = 8$, der unbewegten Welle (!) mit 2 m/s entgegenläuft; in beiden Fällen ergibt sich für den Beobachter dieselbe Zeitfunktion. Und – liebe Physiker: Gaaaanz ruhig bleiben: Wellen auf Gitarrensaiten laufen nicht mit Lichtgeschwindigkeit. Auch nicht näherungsweise.

Die bisherigen Abbildungen haben Orts- und Zeitfunktion der **Auslenkung** dargestellt, weil diese Größe bei schwingenden Saiten gut beobachtbar ist. Aus systemtheoretischer Sicht ist aber die **Schnelle** v wichtiger, denn aus ihr entstehen – zusammen mit der Kraft – Leistung und Impedanz. Die Schnelle v (am Ort z_0) ist das partielle zeitliche Differential der Auslenkung ξ (am selben Ort):

$$v(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\xi(z,t)$$ Zeitfunktion: Auslenkung → Schnelle

In allgemeiner Darstellung, bei der v und ξ von zwei Variablen abhängen, ist eine partielle Differentiation nach t erforderlich. Dabei wird nur nach t differenziert, unter der Bedingung, dass $z = z_0$ hierfür konstant bleibt:

$$v_{\mathrm{ZF}}(t)\Big|_{z=z_0} = \frac{d}{dt}\xi_{\mathrm{ZF}}(t)\Big|_{z=z_0}$$ Beide Funktionen für denselben Ort z_0

Nun hängen aber Ort und Zeit über die Ausbreitungsgeschwindigkeit zusammen: $z = z_0 - ct$. Es ist deshalb möglich, die zeitliche Differentiation d/dt in eine örtliche Differentiation d/dz umzuformen, und damit von der Ortsfunktion der Auslenkung $\xi_{\mathrm{OF}}(z)$ direkt zur Ortsfunktion der Schnelle $v_{\mathrm{OF}}(z)$ zu gelangen (Kettenregel der Differentialrechnung):

$$v_{\mathrm{OF}}(z)\Big|_{t=t_0} = -c \cdot \frac{d\xi_{\mathrm{OF}}(z)}{dz}\Big|_{t=t_0}$$ Ortsfunktion: Auslenkung → Schnelle

Bei all diesen Gleichungen ist das **Vorzeichen** der Schnelle v an der ξ-Richtung orientiert: Bewegung in ξ-Richtung ergibt positives v. Die Umrechnung der Schnelle-Ortsfunktion in die Schnelle-Zeitfunktion geschieht wie bei der Auslenkung durch Substitution: $z = z_0 - ct$.

$$v_{\mathrm{OF}}(z) \Rightarrow v_{\mathrm{OF}}(z_0 - ct) \Rightarrow v_{\mathrm{ZF}}(t)$$ Ortsfunktion → Zeitfunktion

Bei bekannter Ortsfunktion und bekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Zeitfunktion eindeutig definiert, und umgekehrt. Bei bekannter Auslenkung und bekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Schnelle eindeutig definiert, und umgekehrt.

Abb. 2.4 zeigt die Ortsfunktionen dreieckförmiger Auslenkungswellen; die zugehörigen Schnellewellen sind rechteckförmig. In den Bildern ist *z* die Abszisse; von oben nach unten sind 7 aufeinanderfolgende Zeitpunkte dargestellt. Obwohl die Form der Auslenkungs-Ortsfunktion in beiden Fällen dieselbe ist, unterscheiden sich die Schnelle-Ortsfunktionen im Vorzeichen: In den bisher verwendeten Formeln wird diese Vorzeichenumkehr durch *c* bewirkt. Für rechtslaufende Wellen wurde *c* positiv definiert, für linkslaufende negativ.

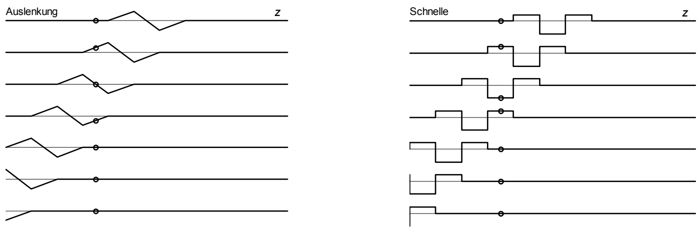


Abb. 2.4a: Ortsfunktionen einer nach links laufenden Welle. Der markierte Punkt wird zuerst nach *oben* bewegt: Die Schnelle dieses Punktes beginnt positiv.

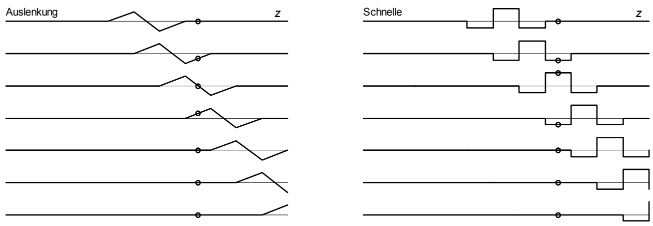


Abb. 2.4b: Ortsfunktionen einer nach rechts laufenden Welle. Der markierte Punkt wird zuerst nach *unten* bewegt: Die Schnelle dieses Punktes beginnt negativ.

N.B.: Am linken und rechten Rand verschwindet die Welle aus dem Bildausschnitt; es erfolgt keine Reflexion.

Auslenkung ξ und Schnelle v beschreiben die Saiten-Deformation, die **Kraft** F kann als deren Ursache interpretiert werden. Wie schon erwähnt, ist hierbei nicht die Spannkraft, sondern die Querkraft gemeint. An dieser Stelle ist es zweckmäßig, den Blick von der mechanischen zur elektrischen Leitung zu wenden. Da beiden Leitungen derselbe Differentialgleichungstyp zugrunde liegt (nur die Systemparameter heißen anders), ermöglichen **Analogiebetrachtungen** vom Verhalten einer Leitung auf das einer anderen zu schließen [3]. Besonders naheliegend ist, die Erkenntnisse der elektrischen Leitungstheorie [5] mittels Kraft-Strom-Analogie auf mechanische Leitungen zu übertragen. Hierbei ergeben sich folgende Entsprechungen: Kapazität $\leftrightarrow$ Masse, Induktivität $\leftrightarrow$ Feder, elektrische Admittanz $\leftrightarrow$ mechanische Impedanz, elektrische Spannung $\leftrightarrow$ Schnelle, Strom $\leftrightarrow$ Kraft. Zur Vereinfachungen werden nur verlustlose Leitungen betrachtet, auf denen Signaldämpfungen im Kurzzeitbereich vernachlässigbar werden können. Dispersion wird nicht berücksichtigt.

Wenn sich auf einer elektrischen Leitung eine Welle ausbreitet, hängen an jedem Ort dieser Leitung Spannung und Strom über den **Wellenwiderstand** Z_{Wel} zusammen: $\underline{U} = Z_{Wel} \cdot \underline{I}$. Der Wellenwiderstand ist für verlustlose Leitungen rein resistiv (d.h. reell). Diese Aussage ist kein Widerspruch: Die Leitung nimmt ja tatsächlich Wirkleistung auf – allerdings nicht, um sie in Wärme umzuwandeln, sondern um sie weiterzuleiten. Damit es nicht zu Reflexionen kommt, geht man zumeist von einer *unendlich langen Leitung* aus; dies ist aber nicht zwingend: Solange sich der Welle kein 'Hindernis' in den Weg stellt, wird mit dem Wellenwiderstand gerechnet. Wendet man nun die *F*-*I*-Analogie auf die elektrische Leitung an, erhält man:

$$\underline{F} = Z_W \cdot \underline{v} \qquad \text{mechanische Leitungsgrößen}$$

Im Unterschied zum elektrischen Wellenwiderstand Z_{Wel} wird der mechanische Wellenwiderstand Z_W genannt.

Der mechanische Wellenwiderstand Z_W berechnet sich mit längenspezifischer Masse *m*' und längenspezifischer Nachgiebigkeit *n*' zu:

$$Z_W = \sqrt{m'/n'} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\rho D^2 \pi \cdot \Psi}$$ mechanischer Wellenwiderstand

In dieser Formel steht Ψ für die Saitenspannkraft, ρ für die Dichte, und D für den Durchmesser. Für einen 9er-Satz erhält man 0,68 Ns/m (E2♣) bzw. 0,14 Ns/m (E4), siehe Kap. A.7.

Bei der ungestört fortschreitenden Welle sind an jedem Ort Kraft F und Schnelle v über diese reelle Größe verbunden. Als Beispiel: Die E4-Saite schwingt mit 1 mm Amplitude; ihre Schnelle beträgt $2\pi 330 s^{-1} 0{,}001 m$ = 2,07 m/s (330Hz, sinusförmig, Scheitelwert). Mit Z_W = 0,14 Ns/m ergibt sich für den Scheitelwert der Kraftwelle: F = 0,29 N. Weil Z_W reell ist, sind Kraft und Schnelle an jedem Ort in Phase. Dies gilt aber nur für die ungestört fortschreitende Welle. Sobald reflektierte Wellen überlagert werden, ergeben sich andere Abhängigkeiten. Die folgende Tabelle zeigt die formalen Zusammenhänge zwischen den Wellengrößen.

Ortsfunktion → Zeitfunktion: $z = z_0 - ct$.   Zeitfunktion → Ortsfunktion: $t = t_0 - z/c$

	Ortsfunktion	Zeitfunktion
Auslenkung	$\xi_{\mathrm{OF}}(z)$	$\xi_{\mathrm{ZF}}(t)$
Schnelle	$v_{\mathrm{OF}}(z) = -c \cdot \dfrac{d\xi_{\mathrm{OF}}(z)}{dz}$	$v_{\mathrm{ZF}}(t) = \dfrac{d\xi_{\mathrm{ZF}}(t)}{dt}$
Kraft	$F_{\mathrm{OF}}(z) = Z_W \cdot v_{\mathrm{OF}}(z)$	$F_{\mathrm{ZF}}(t) = Z_W \cdot v_{\mathrm{ZF}}(t)$

Mithilfe der bisher aufgestellten Formeln ist es möglich, Orts- und Zeitfunktionen ineinander umzurechnen, und Beziehungen zwischen Auslenkung, Schnelle und Kraft herzustellen. Dem **Vorzeichen** wurde allerdings noch zu wenig Aufmerksamkeit gewidmet. Seine Definition ist nicht so trivial, wie zunächst vielleicht vermutet. Bei der Auslenkung ergeben sich noch relativ einfache Zusammenhänge: Auslenkungen <u>in</u> ξ-Richtung werden positiv definiert. Für die in +*z*-Richtung fortschreitende Welle bedeutet positive Auslenkung also: In Ausbreitungsrichtung gesehen erfolgt die Auslenkung 'nach links', für die in –z-Richtung laufende Welle ist positive Auslenkung hingegen: in Ausbreitungsrichtung gesehen 'nach rechts'.

Es gibt offensichtlich zwei unterschiedliche Möglichkeiten zur **Vorzeichendefinition**: Entweder mit Bezug auf absolute Koordinaten, oder mit Bezug auf die Ausbreitungsrichtung. Wenn Wellen, die sich in unterschiedliche Richtungen ausbreiten, überlagert werden sollen, sind **Absolutkoordinaten** zweckmäßiger; die Überlagerung kann dann als einfache Addition ausgeführt werden, unabhängig von der Ausbreitungsrichtung. Bei der **Auslenkung** ist diese Definition naheliegend: Auslenkungen in ξ-Richtung sind positiv. Auch bei **Schnelle** und Beschleunigung empfiehlt sich dieses Prinzip. Eine positive **Beschleunigung** heißt folglich, dass sich die Saite mit zunehmender Schnelle in ξ-Richtung bewegt. Bei der **Kraft** gilt: Eine positive Kraft erzeugt einen Druckzustand in der Feder. In einer aufrecht stehenden Schraubenfeder kann ein *Druck*zustand erzeugt werden, wenn auf das obere Ende nach unten gedrückt wird, oder auf das untere Ende nach oben – beide Fälle bewirken positive Kraft.

♣ Bei den umsponnenen Saiten muss wegen der eingeschlossenen Luft mit einer um ca. 10% verringerten Dichte gerechnet werden.

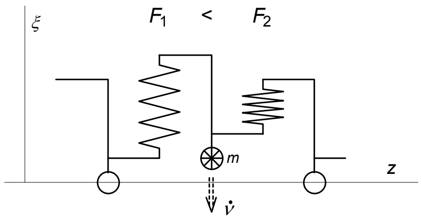


Abb. 2.5: Leitungselement. Die Kreise sind in Querrichtung bewegbare Massen, die Federn bilden die Quersteifigkeit nach. $F_2 > F_1$ bedeutet, dass in der rechten Feder eine größere Druckkraft herrscht. Als Konsequenz wirkt auf die Masse eine nach unten gerichtete Beschleunigung, hier durch den Pfeil veranschaulicht. Mit der o.a. Vorzeichenkonvention ist diese Beschleunigung negativ (negative ξ-Richtung).

Zur Veranschaulichung der Transversalkräfte dient das Feder-Masse-Modell nach **Abb. 2.5**. Die Auslenkung ξ der Massenpunkte ist direkt als Distanz zur Nulllinie zu sehen, die in den Federn wirkende Querkraft F kann aus der Deformation der Federn entnommen werden. Die für die Massen relevanten Beschleunigungskräfte ergeben sich als Differenz der beiden benachbarten Federkräfte. Die Kraftdifferenz $F = F_2 - F_1$ bewirkt eine nach unten gerichtete Beschleunigung, die Trägheits-Formel erfordert also ein Minuszeichen. Dividiert man die Gleichung durch die differentielle Länge dz des Leitungselementes, wird aus der Kraft die längenspezifische Kraft, und aus der Masse m die längenspezifische Masse m'.

$$F_2 - F_1 = -\dot{v} \cdot m \qquad \} \qquad \frac{dF}{dz} = -\dot{v} \cdot \frac{dm}{dz} = -\dot{v} \cdot m' \qquad \text{Trägheitsgesetz}$$

Die in einer Feder wirkende Querkraft F hängt über die Nachgiebigkeit n von der Längenänderung $\Delta\xi$ ab: $F = \Delta\xi/n$. Die Längenänderung ergibt sich als Differenz zweier benachbarter Auslenkungen, durch Bezug auf dz wird aus der Nachgiebigkeit n die spezifische Nachgiebigkeit n'.

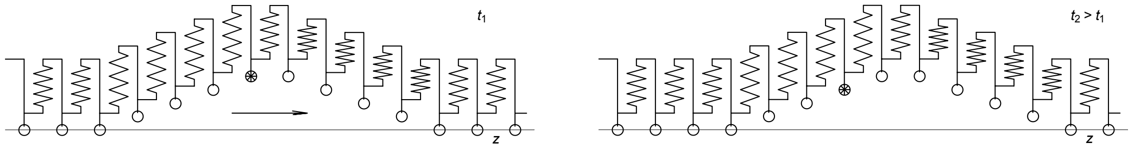
$$F = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{n} \qquad \} \qquad F = -\frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{dz}{dn} = -\frac{d\xi/dz}{n'} \qquad \text{Hookesches Gesetz}$$

Die spezifische Nachgiebigkeit (Nachgiebigkeit pro Länge) ist der Kehrwert der Saitenspannkraft Ψ (siehe später). Durch nochmalige Differentiation der Federkraft erhält man zwei Ausdrücke, die gleichgesetzt werden können:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -m' \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -\Psi \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}; \qquad \text{daraus folgt:} \qquad \boxed{\Psi \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = m' \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

Die hiermit gefundene Differentialgleichung wird **Wellengleichung** genannt. Sie verknüpft die zweite örtliche Ableitung (Krümmung) mit der zweiten zeitlichen Ableitung (Beschleunigung). Die allgemeine Lösung besteht aus der Überlagerung beliebig vieler Wellen, die jeweils nach rechts oder nach links laufen können. Der Betrag der Ausbreitungsgeschwindigkeiten muss aber für alle Wellen gleich sein, denn der hängt als Konstante von den Leitungsparametern (Saitenparametern) ab. Für nach rechts laufende Wellen wurde c (willkürlich) positiv definiert, für nach links laufende negativ. Der Wellenwiderstand $Z_W = F/v$ ist ebenfalls vorzeichenbehaftet, mit der bisherigen Vorzeichenkonvention gehört zu einer nach rechts laufenden Welle ein positiver Wellenwiderstand, zu einer nach links laufenden ein negativer.

$$c^2 = \Psi / m'; \quad c = \pm\sqrt{\Psi / m'} \qquad Z_W^2 = \Psi \cdot m'; \quad Z_W = \pm\sqrt{\Psi \cdot m'}$$



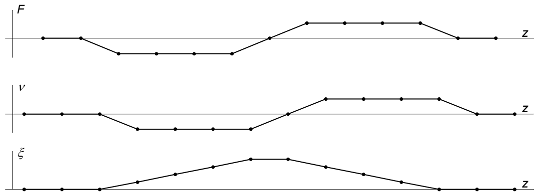
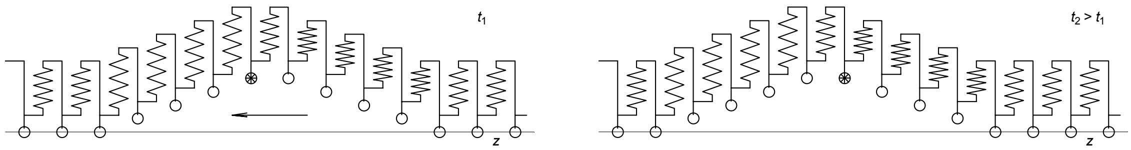


Abb. 2.6a: Nach rechts laufende Transversalwelle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* ist positiv, der Wellenwiderstand Z_W ist ebenfalls positiv.



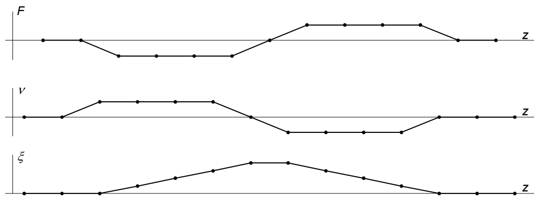


Abb. 2.6b: Nach links laufende Transversalwelle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* ist negativ, der Wellenwiderstand Z_W ist ebenfalls negativ.

In **Abb. 2.6** ist eine fortschreitende Welle zu den beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 dargestellt; aus dem Unterschied der Auslenkungen kann auf die momentane Schnelle geschlossen werden. Beispielsweise bewegt sich bei der nach rechts laufenden Welle die mit * gekennzeichnete Masse nach unten; ihre Schnelle ist folglich negativ. Die dargestellte Kraft *F* ist aber nicht die Massenträgheitskraft, sondern die in den Federn übertragene Kraft. Durch die Ortsfunktion der Auslenkung ist *F* eindeutig bestimmt; zur Bestimmung von *v* muss aber zusätzlich *c* bekannt sein.

Es ist nicht zwingend, in Abb. 2.6 die Federn in der gezeichneten Weise zu verbinden. Alternativ könnte man auch das obere Federende mit der links daneben angeordneten Masse verbinden, und das untere mit der rechten Masse. Damit würde sich allerdings das Vorzeichen der Kraft umkehren! Als Konsequenz hätte eine nach links laufende Welle einen positiven Wellenwiderstand, und eine nach rechts laufende einen negativen. Beide Änderungen stellen keinen Widerspruch dar: Das Feder-Masse-Modell ist die diskrete Visualisierung eines mechanischen Spannungszustandes. Das Vorzeichen ist in diesem Modell zunächst willkürlich definierbar; danach sind aber alle folgenden Berechnungen an diese Definition gebunden. Anstelle des Feder-Masse-Modells könnte man auch ortsdiskrete Schubspannungen definieren, aber wiederum mit Vorzeichenfreiheit.