

1.4 Longitudinalwellen

Bei der Gitarrensaite ist der wichtigste Wellentyp die Biegewelle, die mit relativ niedriger Phasengeschwindigkeit die Saite entlang läuft (Kap. 1.1). Zusätzlich können aber noch weitere Wellentypen entstehen, die alle eine deutlich höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit aufweisen. Ihre Energie ist relativ gering, und aufgrund ihrer hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit liegt bereits die Grundfrequenz relativ hoch – trotzdem sind sie beachtenswert.

Bei den Analysen zu Abb. 1.11 zeigte sich immer wieder eine Irregularität bei Vielfachen von ca. 1,4 kHz. Dies wurde zunächst als Tonabnehmer-Resonanz interpretiert, bis sich bei ergänzenden Messungen herausstellte, dass diese Irregularität von der Saitenlänge abhängig war – sie musste folglich von der Saite, und nicht vom Tonabnehmer herrühren. Es ist bekannt, dass in festen Körpern, deren Abmessungen groß im Vergleich zur Körperschallwellenlänge sind, sowohl Transversal- als auch Longitudinalwellen, als auch deren Mischtypen auftreten können [11]. In langen, dünnen Stäben bilden sich neben den zugkraftabhängigen Biegewellen vor allem **Dehnwellen** (Schnürwellen) aus. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit ist konstant und nicht dispersiv:

$$c_D = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Dehnwellengeschwindigkeit}$$

Für massive Stahlsaiten ergibt die Berechnung $c_D \approx 5100$ m/s, mit 64 cm Saitenlänge erhält man hiermit eine (zugkraftunabhängige) Dehnwellengrundfrequenz von ca. 4 kHz.

Bei **umspunnenen** Saiten hängt die Längssteifigkeit hauptsächlich vom Kerndurchmesser D_K ab, die Masse hingegen vom Außendurchmesser D_A . Mit längenspezifischer Nachgiebigkeit n' und längenspezifischer Masse m' erhält man die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu:

$$c_D = \frac{1}{\sqrt{n' \cdot m'}} = \sqrt{\frac{E \cdot D_K^2 \pi}{\rho \cdot D_A^2 \pi}} = \frac{D_K}{D_A} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Dehnwellengeschwindigkeit bei Umsp.}$$

Gegenüber der ersten Formel ist hierbei noch der Korrekturfaktor Kerndurchmesser / Außendurchmesser zu berücksichtigen, bei üblichen E₂-Saiten ist dieses Verhältnis ca. 0,32 ... 0,42. Die Dehnwellengrundfrequenz erniedrigt sich hiermit auf ca. 1,3 ... 1,6 kHz, was gut zu den Messergebnissen passt. Noch genauere Werte erhält man, wenn auch Umspinnungs-Füllfaktor und Umspinnungs-StEIFigkeit mit berücksichtigt werden.

Die Dehnwellenresonanzen sind sowohl in Abb. 1.11 bei Vielfachen von 1,4 kHz als auch in Abb. 1.15 nach 3 ms deutlich zu sehen. Ihre Auswirkung auf die Übertragung beschreibt folgendes Modell: Beim Anzupfen werden zwei in entgegengesetzte Richtung laufende Transversalwellen erzeugt (Kap. 1.1), die orts- und zeitabhängigen Feldgrößen *Kraft* und *Schnelle* werden über die Leitungsgleichungen (Kap. 2) verknüpft, der Transversalwellenwiderstand errechnet sich zu ca. 1 Ns/m. Leitungsabschluss ist der Steg mit dem Piezotonabnehmer, der als sehr steife Feder aufgefasst wird (unterresonanter Betrieb). Die Ausgangsspannung des elektrisch leerlaufenden Piezos ist dann proportional zur *Stegauslenkung*. Am Steg findet eine Modenkopplung statt, d.h. ein kleiner Teil der Transversalwelle wird in eine Dehnwelle umgewandelt. Die Eingangsimpedanz der Dehnwellenleitung belastet die Transversalwellenleitung und beeinflusst somit den Übertragungskoeffizient des Piezotonabnehmers.

Die Abschlussimpedanzen der Saite werden in erster Näherung als groß gegenüber den Wellenwiderständen aufgefasst (bei genauerer Betrachtung müsste man Hals- und Korpusresonanzen berücksichtigen). Die Eingangsimpedanz einer leerlaufenden Dehnwellen-Leitung zeigt kotangensförmige Frequenzabhängigkeit, mit Maxima bei Vielfachen der Dehnwellengrundfrequenz. Bei diesen Maxima wird folglich die Federmöglichkeit des Stegs erschwert, und seine Auslenkung (und damit die Piezo-Empfindlichkeit) verringert.

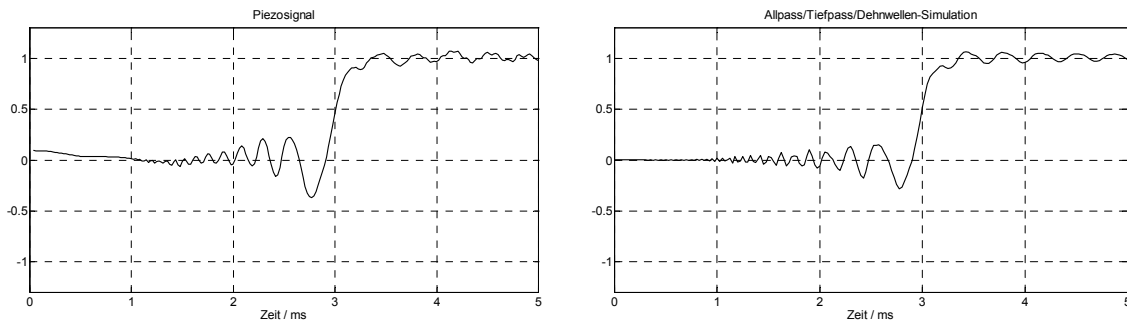


Abb. 1.17: Messung (links) und Simulation (rechts); Sprunganregung in Saitenmitte bei $t = 0$, E_2 -Saite.

In **Abb. 1.17** wurde die Allpass-Simulation um eine Dehnwellenleitung ergänzt, die Verbesserungen sind signifikant. Die noch verbleibenden Unterschiede kommen vom Plektrum (tiefrequent, linker Bildbereich) und von Sattelreflexionen (hochfrequent, rechter Bildbereich); beide wurden in der Simulation nicht nachgebildet.

Die prinzipielle Wirkung der Dehnwellenleitung auf den Piezotonabnehmer lässt sich mit diskreten Elementen beschreiben: Bei sehr tiefen Frequenzen wirkt nur die Längssteifigkeit, das Ersatzsystem ist eine Feder. Zur Nachbildung der tiefsten Eigenschwingung denkt man sich die Masse in Saitenmitte konzentriert, mit je einer halben Feder rechts und links davon. Oberhalb dieser Eigenresonanz nimmt die Massenbewegung trägheitsbedingt ab, die Eingangsimpedanz wird von der halben Feder gebildet. Zur Nachbildung höherer Eigenschwingungen unterteilt man die Saite in immer mehr Teilfedern, mit dazwischenliegenden Teilmassen. Eine Federverkürzung bedeutet eine Erhöhung der Steifigkeit, so dass der Piezo mit zunehmender Frequenz durch eine immer steifere Feder belastet wird. Damit nimmt die Piezo-Empfindlichkeit zu hohen Frequenzen hin treppenförmig ab, mit Treppenstufen bei Vielfachen der Dehnwellenresonanzen.

In **Abb. 1.18** ist im oberen Bild nochmals die Spektralanalyse aus **Abb. 1.11** wiederholt. Die tiefe E-Saite (E_2) wurde hierbei mit einem Plektrum ca. 6 mm vom Steg entfernt angezupft. Das darunter liegende Bild zeigt das Ergebnis einer Simulationsrechnung, bei der die dispersionsbedingte Inharmonizität, die Dehnwellenbelastung und eine einfache Höhenbedämpfung (Tiefpass erster Ordnung) berücksichtigt werden. In beiden Bildern erkennt man ähnliche Irregularitäten bei ganzzahligen Vielfachen von 1,4 kHz, die als **Dehnwellenresonanzen** erklärt werden können. Die spektrale Hüllkurve verläuft in beiden Bildern in ähnlicher Form, im Detail verbleiben aber Unterschiede. Der wichtigste Grund für diese Unterschiede liegt in der Frequenz der Teiltöne, deren Berechnung in den bisher diskutierten Formeln eine ideale Saiteneinspannung zugrundelegt. Die reale Kopfsattel- bzw. Stegsattelimpedanz ist aber nicht unendlich groß: Hals, Korpus, Nachbarsaiten und viele Kleinteile schwingen als kompliziert gekoppeltes System, woraus eine Vielzahl von Strukturresonanzen entsteht.

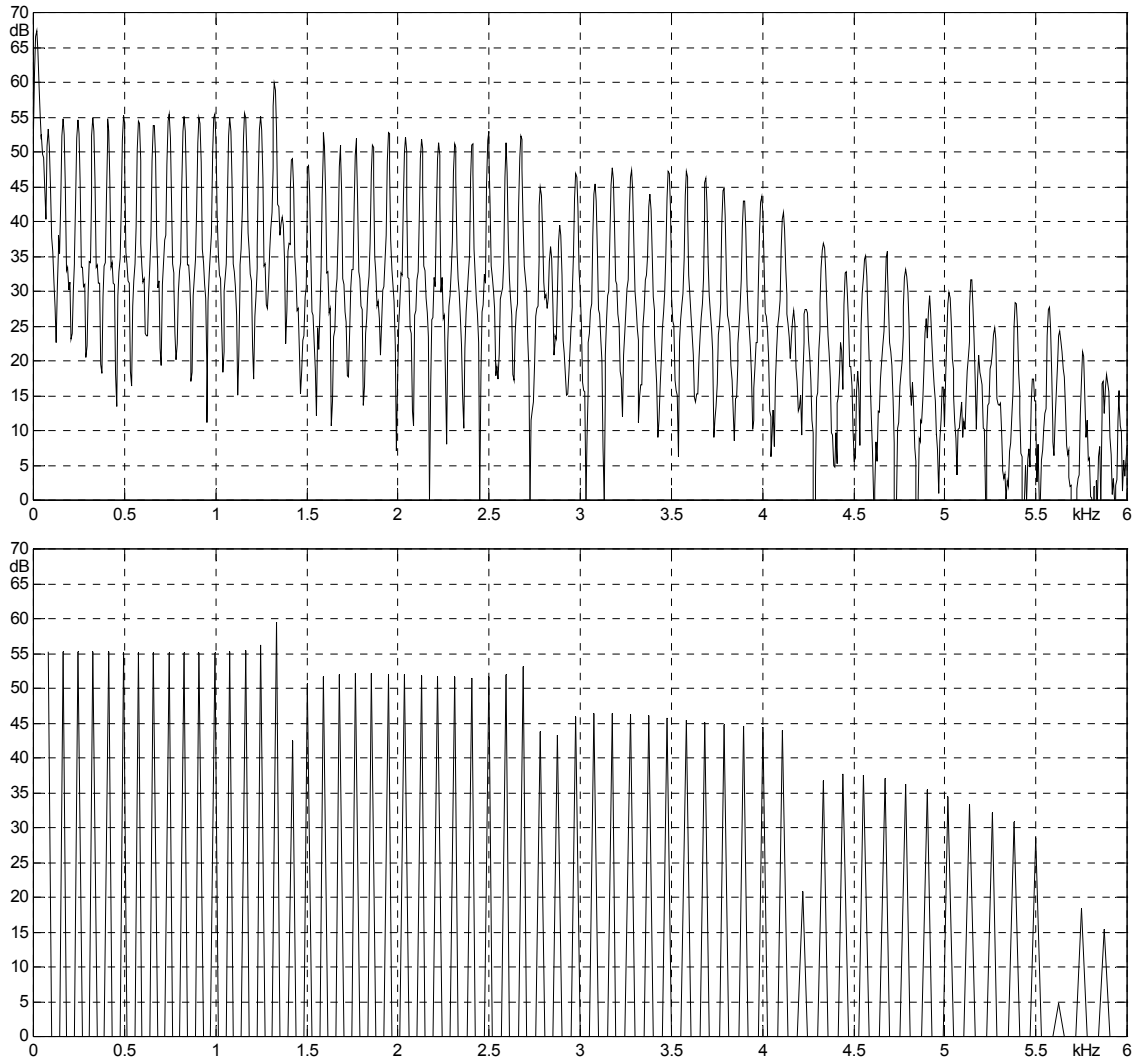


Abb. 1.18: Betragsspektrum: Messung (oben) und Modellrechnung (unten)

Alle Schwingungen können nicht nur in einer, sondern in drei Richtungen auftreten, und zusätzlich sind auch noch Torsionsschwingungen möglich. Nicht alle Resonanzen werden die Sattelimpedanz wesentlich beeinflussen, aber die Dehnwellenresonanzen haben offensichtlich einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss. In Abb. 1.18 wurden die Dehnwellenresonanzen nur bezüglich des Piezo-Frequenzganges (globale Hüllkurve) berücksichtigt, nicht jedoch in ihrem Einfluss auf die genauen Teiltonfrequenzen (Ergänzungen hierzu in Kap. 2.5). Wegen der hohen Resonanzgüten und der damit verbundenen hohen Flankensteilheit (dB/Hz) bewirkt eine Frequenzverschiebung von nur wenigen Promille (!) bereits eine deutliche Änderung im Linienpegel, außerdem entstehen zusätzliche Spektrallinien (bei 2,8 kHz deutlich zu sehen). Da die mechanischen Gitarren-Parameter nicht mit Promille-Genauigkeit bestimmt werden können, kommen die Grenzen der Modellierung in Sicht.

Das Dehnwellen-Modell entstand zunächst als Arbeitshypothese, um den treppenförmigen Hüllkurvenverlauf erklären zu können. Drei Jahre später war dann ein Versuchsaufbau mit Laser-Vibrometer einsatzfähig, der weitere unterstützende Erkenntnisse lieferte:

Der lasergestützte Versuchsaufbau besteht aus einem 250 kg schweren Steintisch, auf dem ein **Polytec-Laserkopf** montiert ist. Parallel zur Tischfläche ist ein 0,7 mm dicker Stahldraht gespannt; er liegt am einen Ende in einem Schneidenlager auf einem U-Träger auf, der seinerseits an den Steintisch geschraubt ist. Das andere Ende des Drahtes ist an der 13,3 m entfernten Wand an einem Impedanzmesskopf (Brüel&Kjaer 8001) befestigt, der die Longitudinalkraft misst. Der Draht wurde so stark gespannt, dass seine Grundfrequenz 5 Hz beträgt; dies ergäbe für 0,65 m Drahtlänge bei gleicher Spannkraft eine Grundfrequenz von 102 Hz. Die Vertikalschwingung des Drahtes kann mit dem Laser-Vibrometer abgetastet werden, außerdem wird sie durch Tonabnehmer erfasst, die unter dem Draht am Steintisch befestigt sind. Angeregt wird diese "lange Saite" durch ein Pertinax-Plättchen, das fallhammerartig niederfällt und dadurch einen kurzen transversalen Auslenkungs-Impuls bewirkt (**Abb. 1.19**).

Wenn der Anregungsort nahe am Saitenlager liegt, wirkt das kurze Saitenstück näherungsweise wie eine steife Feder, gegenüber der das lange Saitenstück, dessen Eingangsimpedanz der Wellenwiderstand ist, vernachlässigt werden kann. Die Masse des Pertinax-Plättchens bildet zusammen mit dieser Saitensteifigkeit ein Schwingungssystem 2. Ordnung – zumindest solange Kraftschluss besteht. Folglich wird die Saite sinushalbwellenförmig in Querrichtung ausgelenkt. **Abb. 1.19** zeigt diese idealisierte Querbewegung, und zum Vergleich Laser-Messergebnisse. Dieser Halbwellenimpuls läuft – wegen Dispersion zunehmend verbreitert – als Biegewelle die Saite entlang; seine Gruppengeschwindigkeit (1.3.1) beträgt tieffrequent 133 m/s, bei hohen Frequenzen ist die Welle etwa dreimal so schnell. Die erste Reflexion kann also nach frühestens 66 ms am Laser-Vibrometer zurückerwartet werden. Tatsächlich misst der Laserstrahl aber schon nach $T = 5,15$ ms eine Reflexion, die zeitlich äquidistant mit abnehmender Amplitude wiederholt wird. Bei einer gesamten Lauflänge von 26,6 m ergibt sich hiermit eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $c_D = 5165$ m/s, der typische Wert für (dispersionsfreie) **Dehnwellen** in Stahldrähten.

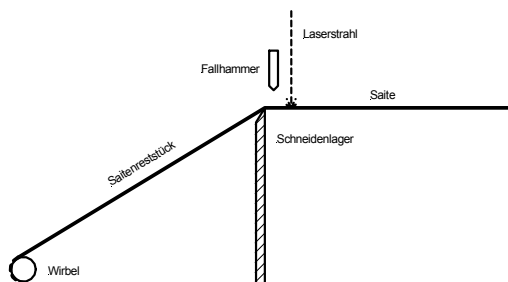
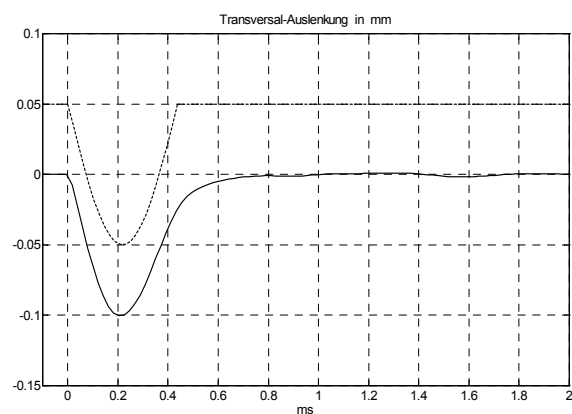
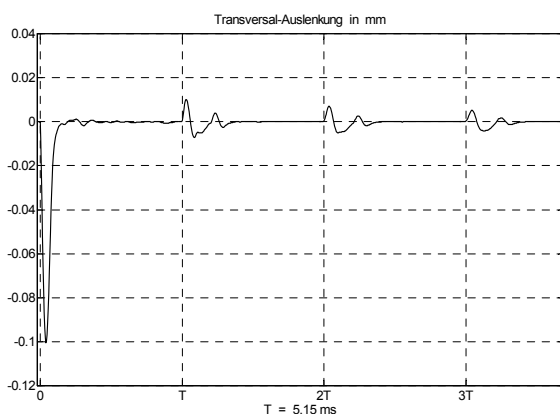


Abb. 1.19: Lasermessplatz (links).

Die unten dargestellten Bilder zeigen Messergebnisse der Saiten-Transversalauslenkung über einer unterschiedlich skalierten Zeitachse. Der idealisierte Verlauf ist rechts unten gestrichelt und verschoben eingezeichnet. Die Anregung erfolgt ca. 1 mm vom Schneidenlager entfernt, der Lasermesspunkt liegt knapp daneben, 5 mm neben dem Schneidenlager.



Die Dehnwelle selbst ist für das **Laser-Vibrometer** allerdings so gut wie unsichtbar, da der Laserstrahl nur auf transversale und nicht auf axiale Bewegungen* reagieren kann. Dass trotzdem Periodizitäten mit $T = 5,15$ ms gemessen werden, liegt an einer Verkopplung der beiden Wellentypen: Die Saite erfährt am Lager einen Knick; hier löst die nach 5,15 ms zurückkommende Dehnwelle eine sekundäre Biegewelle aus – und diese ist für den Laserstrahl sichtbar. In der folgenden Modellierung wird versucht, die Feinstruktur der Reflexionen etwas genauer zu erfassen.

In **Abb. 1.20** sind Messergebnisse vom Lasermessplatz dargestellt; die am rechten Saitenende gemessene Längskraft wurde hierfür integriert. Ohne Stützlager erreicht die Saiten-Dehnwelle 2,6 ms nach der (am linken Lager erfolgten) Anregung das rechte Lager. Der Anregungsimpuls war mit dem in Abb. 1.19 gezeigten vergleichbar, aber nicht identisch. Mit **Stützlager** erfolgt ebenfalls nach 2,6 ms die erste Anregung des Kraftsensors, allerdings abgeschwächt. Ohne Stützlager trifft der zweite Impuls 5,2 ms nach dem ersten am Sensor ein, mit Stützlager schon nach 2 ms. Am rechten und linken Saitenlager erfolgt die Reflexion der Längskraft-Welle gleichphasig (feste Einspannung), am Stützlager ergeben sich für Reflexion und Transmission komplexe Faktoren. Die kleinen Welligkeiten, die im linken Bild von Abb. 1.20 zu erkennen sind, haben ihre Ursache in unvermeidbaren Resonanzen des linken Lagers – ihnen kommt keine besondere Bedeutung zu.

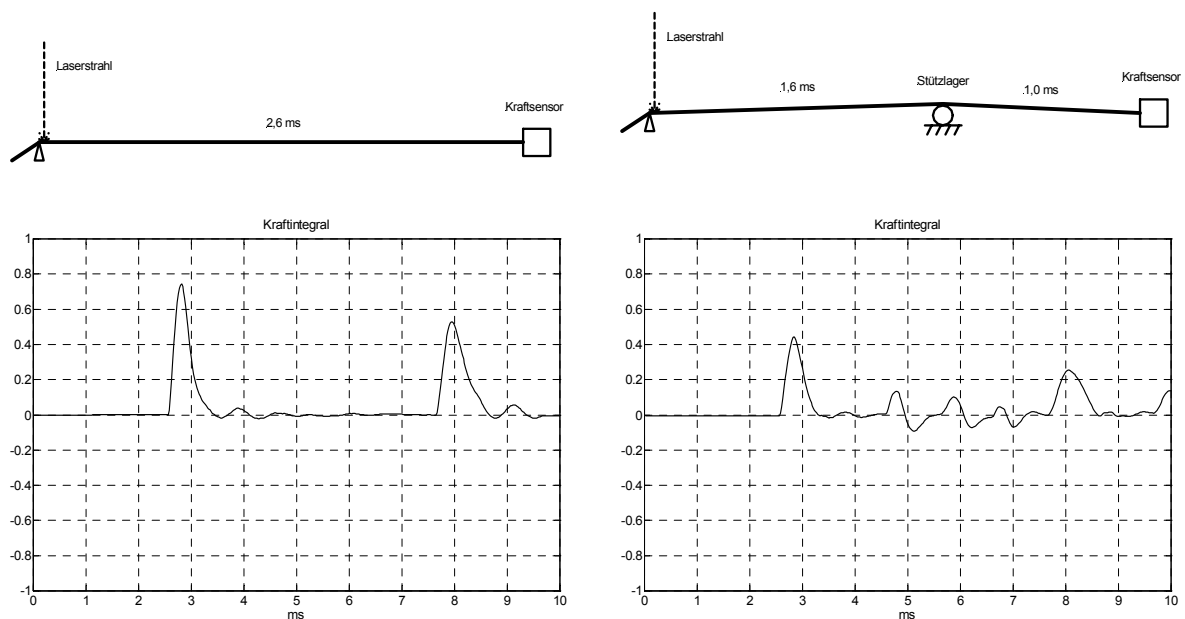


Abb. 1.20: Lasermessplatz ohne/mit Stützlager. Das Stützlager teilt die Saitenlänge in 816 cm : 511 cm. Die Diagramme stellen das zeitliche Integral der Saiten-Längskraft dar, in der Einheit Newton·Millisekunde (Nms). Das positive Vorzeichen bedeutet, dass zuerst eine Stauchung und dann eine Dehnung den Sensor erreicht.

Die im rechten Bild von Abb. 1.20 auftretenden **Reflexionen** weichen in ihrer Form von dem bei 2,6 ms beginnenden Primärimpuls ab. Zwischen 4,6 und 7,5 ms sind drei bipolare Impulse zu beobachten; jeder dieser Impulse ist auf seinem Weg von der Quelle (beim linken Lager) bis zum Kraftsensor einmal über das Stützlager hinweggegangen und wurde zusätzlich mehrfach am Stützlager reflektiert. Wenn aus einem unipolaren Impuls ein bipolarer wird, ist Hochpassfilterung anzunehmen. Die Formänderung der Impulse lässt nur den Schluss zu, dass die Reflexion als **Hochpass** wirkt, und die Transmission als **Tiefpass**.

* Querkontraktionseffekte sind zu gering ausgeprägt

Abb. 1.21 zeigt Rechenergebnisse eines **Dehnwellen-Modells**. Die Transmission über das Stützlager hinweg wurde mit einem Tiefpass 1. Ordnung (1,5 kHz Grenzfrequenz) nachgebildet, die Reflexion mit einem Hochpass 1. Ordnung (1,5 kHz Grenzfrequenz). Die Grenzfrequenz wurde durch "Curve-Fitting" ermittelt (vulgo: Probieren). Die Übereinstimmung ist beachtlich.

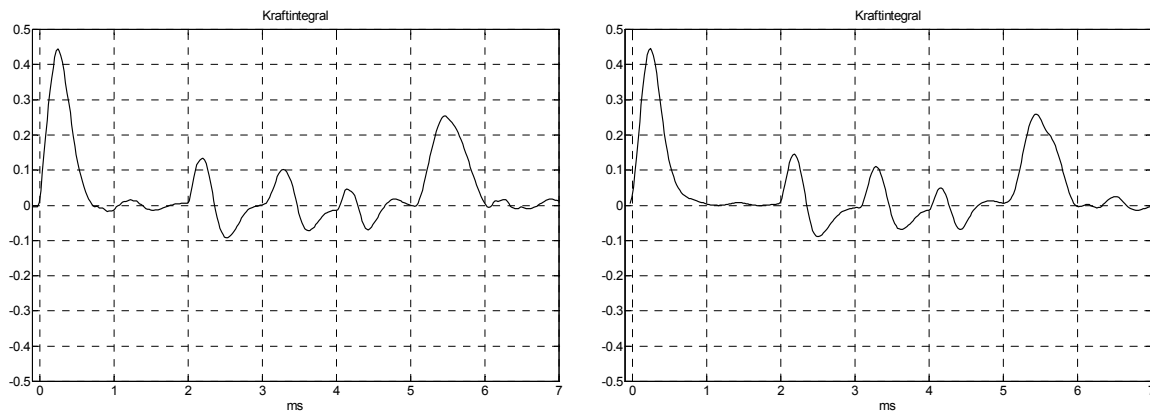


Abb. 1.21: Messung (links) und Modellrechnung (rechts), Saite mit Stützlager, wie in Abb. 1.20. Der Zeitnullpunkt ist um 2,6 ms auf den Beginn des ersten Impulses verschoben. Als Eingangssignal der Modellrechnung wurde die mit dem Laser (nahe des linken Lagers) ermittelte Saiten-Querauslenkung verwendet.

Das **Stützlager** (Abb. 1.20) wurde als beweglicher Messingzylinder (\varnothing 4 mm) realisiert, um den die Saite mit 5° Knickwinkel geführt war. Mithilfe des Steinerschen Satzes lässt sich das axiale Trägheitsmoment eines Zylinders ($mD^2/8$) in das Mantellinien-Trägheitsmoment umrechnen ($3mD^2/8$), mit m = Masse und D = Durchmesser. Longitudinalbewegungen der Saite rollen den Zylinder auf seiner Unterlage hin und her, angetrieben vom Drehmoment $F \cdot D$, mit F = Saitenlängskraft. Die Trägheit der Stützlager-Rollbewegung kann bezüglich der Saitenlängsbewegung in eine äquivalente Translation umgerechnet werden, mit der äquivalenten Masse $m_{\text{ä}} = 3m/8$. Hierin steht m für die tatsächliche Zylindermasse (Volumen \cdot Dichte), und $m_{\text{ä}}$ für die aus Sicht der Saite zu verschiebende Äquivalenzmasse. Quellwiderstand der am Stützlager ankommenden Dehnwelle ist der Dehnwellenwiderstand; für einen Stahldraht mit 0,7 mm Durchmesser ergibt sich Z_W zu ca. 15,8 Ns/m (Anhang). Die über das Stützlager hinweg transmittierte Welle belastet dieses ebenfalls mit Z_W , das Stützlager selbst wird durch die Äquivalenzmasse beschrieben (**Abb. 1.22**). Die Grenzfrequenz dieses Tiefpasses ergibt sich hiermit zu: $f_x = 1/(\pi C R_W) = Z_W/(\pi m_{\text{ä}})$, hieraus kann die Äquivalenzmasse zu 3,4 g berechnet werden, und hieraus wiederum die **Zylindermasse**: $m = 8,9$ g. Der im Versuchsaufbau verwendete Zylinder hatte tatsächlich 8,5 g, was die Modellergebnisse gut bestätigt. Ob die Grenzfrequenz zu 1500 Hz oder zu 1578 Hz angesetzt wird, ändert den Kurvenzug in Abb. 1.21 nur um Strichstärke.

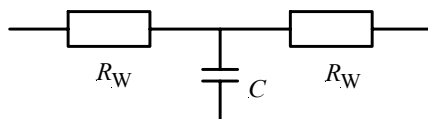


Abb. 1.22: Elektrische Analogieschaltung [3] des Stützlagers. Aus dem mechanischen Wellenwiderstand wird ein elektrischer Leitwert, aus der Äquivalenzmasse wird eine Kapazität (FI-Analogie).

Reflexions- und Transmissionsvorgang können auch mit den für Transversalwelle in Kap. 2.5 ermittelten Gleichungen berechnet werden, als Lagerimpedanz ist dann die Parallelschaltung von R_W und C anzusetzen: $r_F = R_W \cdot pC / (2 + R_W \cdot pC)$, dies entspricht einem Hochpass HP1.

Um den **Entstehungsort** der Dehnwelle zu lokalisieren, wurde die Saite 51 cm vom linken Saitenlager entfernt angeschlagen (**Abb. 1.23**). Würde bereits das Aufprallen des Fallhammers auf die Saite eine Dehnwelle auslösen, müsste das gemessene Kraftintegral ein dispersionsfreies Abbild der Saitenauslenkung am Anregungsort sein. Tatsächlich erhält man aber einen Verlauf, der besser zu der nahe des Lagers gemessenen Auslenkung passt, was nur den Schluss zulässt, dass der wesentliche Teil der Dehnwelle erst entsteht, wenn die (dispersiv verbreiterte) Biegewelle das linke Lager erreicht hat. Diese Hypothese wird auch durch die in **Abb. 1.23** dargestellten Verzögerungszeiten gestützt.

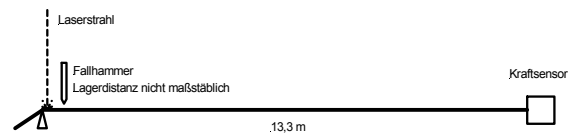
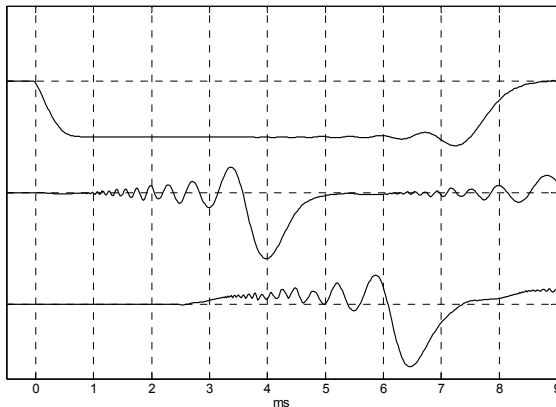


Abb. 1.23: Querauslenkung am Anschlagpunkt, Querauslenkung am linken Saitenlager, Längskraft-Integral am rechten Saitenlager (v.o.n.u.).

Fazit: Dehnwellen sorgen bei der Gitarre zwar nur für Effekte zweiter Ordnung, völlig vernachlässigt werden darf ihre Wirkung aber nicht. Beim Anschlagen der Saite entsteht vor allem eine Biegewelle; sobald diese aber auf ein Lager (Kopf-, Stegsattel) trifft, wird ein Teil der Biegewellen-Energie in eine Dehnwelle umgewandelt. Dehnwellen breiten sich ohne Dispersion aus, sie erzeugen Resonanzen im Frequenzbereich über 1 kHz. An einem Lager mit kleiner Auflagefläche wird eine Dehnwelle nur teilweise reflektiert, ein Teil der Dehnwellen-Energie wird über das Lager hinweg in den jenseitigen Saitenteil eingekoppelt. Der reflektierte Anteil wird teils als Dehnwelle, teils als Biegewelle ausgebildet.

Die Bedeutung dieser **Modenkopplung** zeigt **Abb. 1.24**: Eine 13,3 m lange Saite wurde nahe ihres linken Lagers angeschlagen, der Lasermesspunkt lag knapp daneben. In 20 cm Abstand vom Anschlagpunkt war ein Telecaster-Stegtonabnehmer unter der Saite montiert; er war mit $110 \text{ k}\Omega // 330 \text{ pF}$ belastet. Das Integral der Tonabnehmerspannung ist in **Abb. 1.24** normiert dargestellt. Die Biegewelle passiert 1 ms nach ihrer Entstehung den Tonabnehmer und induziert dort einen Spannungsimpuls. Die ebenfalls erzeugte Dehnwelle läuft die Saite entlang, wird reflektiert, und ist nach 5,2 ms am linken Lager zurück. Hier wird u.a. eine sekundäre Biegewelle erzeugt, die nach einer weiteren Millisekunde den Tonabnehmer passiert. Das Maximum dieses Sekundärimpulses erreicht in **Abb. 1.24** fast 40% des Betrags des Primärimpulses, was die Bedeutung der Dehnwelle – zumindest für diesen Versuchsaufbau – eindrucksvoll belegt.

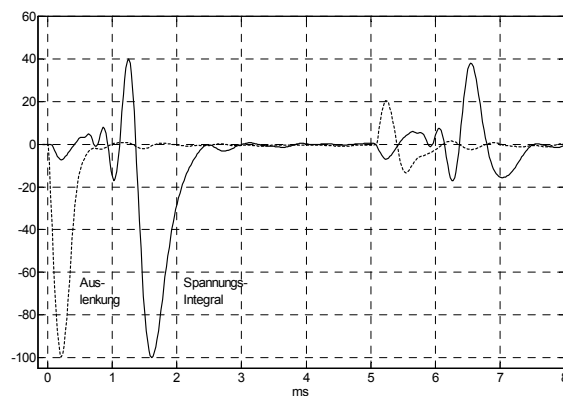


Abb. 1.24: Messungen am Magnet-Tonabnehmer.