1 Grundlagen zur Saitenschwingung

Die Gitarre ist ein Saiteninstrument aus der Untergruppe: Zusammengesetzte Chordophone\Lauteninstrumente\Querriegelinstrumente. Saiten sind die frequenzbestimmenden Oszillatoren, deren Schwingungen entweder direkt als Luftschall abgestrahlt werden, oder – vom Tonabnehmer in elektrische Signale umgewandelt – dem Gitarrenverstärker zugeführt werden. Die Saite ist ein mechanischer Oszillator, der beim Anzupfen kurzzeitig Energie zugeführt bekommt. Nicht viel Energie – aber ausreichend, um auch ohne Verstärker ein Auditorium zu unterhalten. Einen Liter Wasser könnte man mit der Anzupfenergie auch zum Kochen bringen: Hierzu müsste der Gitarrist ungefähr 60.000.000mal zupfen. Das klingt schlimmer, als es ist, bei 5 Zupfer/Sekunde würde es 2 Jahre dauern, wenn man keine Pause und ideale Wärmeisolation vorsieht. Sisyphus (je nach Textverarbeitungsprogramm auch "Sissifuß") wäre glücklich ob solcher Arbeitsbedingungen. Zugegeben: Die mechanistisch/operationistische Annäherung an das Thema Kunst-Produktion wird von den beteiligten Forschungsdisziplinen ambivalent bewertet, elementaristische Schulen müssen sich von Gestaltpsychologen belehren lassen, das Ganze sei doch mehr als die Summe der Teile. Da hilft auch nicht viel, der Erkenntnis "Hendrixsche Genialität ist doch mehr als pure Schwingungsüberlagerung" mit der existenzialistisch anmutenden Frage zu begegnen: "So, und wo isser heute?", zu unterschiedlich sind die Lehrmeinungen. Die folgenden Betrachtungen gelten deshalb nur der Schwingungsmechanik. Als Teil des Ganzen, als wesentlicher Teil.

1.1 Transversalwellen

Die Saiten einer Elektrogitarre bestehen aus Stahl, ihre **Dichte** ρ liegt knapp unter $\rho = 8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. Eine Stahlsaite mit dem **Durchmesser** D wird mit der **Spannkraft** Ψ auf die **Länge** L gedehnt. Greifen am Griffbrett verkürzt die Länge. Typische Längen sind knapp 65cm für die leere (ungegriffene) Saite (= Mensur M). Beim Anzupfen (mit Finger oder Plektrum) wird die Saite in Querrichtung ausgelenkt und losgelassen, woraufhin sie eine freie gedämpfte Schwingung ausführt. Nach dem Loslassen breitet sich von der Anzupfstelle eine Querbewegung (Transversalwelle) in beide Richtungen aus. Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c, mit der diese Welle entlang der Saite läuft, beträgt für $\rho = 8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$:

$$c = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi\rho}} = \frac{\sqrt{\Psi/\mathrm{N}}}{D/\mathrm{mm}} \cdot 12{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}$$

Für eine Saite mit 0,35mm Durchmesser und 50N Spannkraft ergibt sich c zu 255m/s. Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit (in Saitenlängsrichtung) darf nicht mit der Geschwindigkeit verwechselt werden, mit der die Saite in Querrichtung hin- und herschwingt. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird die Quergeschwindigkeit **Schnelle** v genannt. Genauere Untersuchungen zeigen, dass c nicht konstant ist, sondern von der Frequenz abhängt (Dispersion); dies wird in Kapitel 1.3 beschrieben.

Die Transversalwelle läuft mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c in beide Richtungen, wird an beiden Enden (Kopf- bzw. Stegsattel) reflektiert und kommt als Reflexion zum Anzupfpunkt zurück. Den Vorgang des Reflektierens kann man sich modellhaft als überlagertes Signal einer **Spiegelquelle** vorstellen, die hinter dem Saitenende angeordnet ist (**Abb. 1.1**). Bei diesem Modell läuft die beim Anzupfen entstehende Primärwelle über das Saitenende hinaus (wird also nicht reflektiert), aber zusätzlich kommt der Primärwelle eine überlagerte (addierte) Spiegelwelle entgegen. Am festgehaltenen Saitenende treffen beide Wellen aufeinander. Es ist offensichtlich, dass die Auslenkung der Spiegelwelle (und damit auch deren Ableitung v) **gegenphasig** zur Primärwelle sein muss, damit das Saitenende tatsächlich (idealisiert) in Ruhe bleibt und keine Bewegungen ausführt. Diese Phasenumkehr gilt für Kopf- und Stegsattel in gleichem Maße.

Abb. 1.1: Transversalwellenausbreitung auf einer eingespannten Saite

Haben die von Kopf- bzw. Stegsattel kommenden Reflexionen den Anzupfpunkt erreicht, laufen sie über ihn hinweg, werden nun am jeweils anderen Ende gegenphasig reflektiert und laufen mit der ursprünglichen Phasenlage zum Anzupfpunkt zurück. Wenn sie ihn nach Zurücklegen von $2L$ erreichen, ist eine vollständige **Grundschwingungsperiode** T durchlaufen. Der Kehrwert von T ist die **Grundfrequenz** f_G der Saite. Eine 0,65m lange Stahlsaite mit 0,35mm Durchmesser schwingt bei 50N Zugkraft mit 196Hz Grundfrequenz (g bzw. G_3).

Die Frequenzen der leeren Gitarrensaiten liegen bei: **E** = E_2 = 82.4Hz, **A** = A_2 = 110Hz, **d** = D_3 = 146.8Hz, **g** = G_3 = 196Hz, **h** = H_3 = 246.9Hz, **e'** = E_4 = 329.6Hz.

Die Saitengrundfrequenz hängt von der **Spannkraft** Ψ, der **Dichte** ρ, dem **Durchmesser** D und der **Länge** L ab. Vervierfachung der Kraft, bzw. Halbierung der Länge, bzw. Halbierung des Durchmessers verdoppeln die Grundfrequenz:

$$f_G = \frac{c}{2L} = \frac{\sqrt{\Psi / \pi\rho}}{DL} = \frac{\sqrt{\Psi/\mathrm{N}}}{D/\mathrm{mm} \cdot L/\mathrm{m}} \cdot 6{,}3\,\mathrm{Hz}$$ Grundfrequenz

Die zum Erreichen einer bestimmten Grundfrequenz nötige Spannkraft Ψ errechnet sich aus der Saitenlänge L, und den Materialdaten Dichte ρ und Durchmesser D. Grundfrequenz und Saitenlänge treten hierbei als Produkt auf, und deshalb sind bei einer mit konstanter Kraft gespannten Saite Länge und Frequenz zueinander reziprok:

$$\Psi = (f_G \cdot L)^2 \cdot \pi\rho D^2 = c^2 \cdot \pi\rho D^2 / 4$$ Spannkraft

Da die tatsächlichen Schwingungsvorgänge kompliziert sind, verwendet man idealisierende Modelle. Im einfachsten Fall nimmt man ebene Polarisation, frequenzunabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit, keine Verluste und ideale Reflexionen an, und beschreibt die Saite als linear-zeitunabhängiges LZI-System.

Die von den Reflexionen herrührende periodische Wiederholung kann als (zeitliche) Faltung des Anregungsimpulses mit einem kausalen Dirac-Puls aufgefasst werden. Kausal bedeutet, dass das Signal für negative Zeiten identisch null ist, ein kausaler Dirac-Puls enthält für $t \geq 0$ äquidistante Dirac-Impulse. Einer zeitlichen Faltung entspricht im Spektralbereich eine Multiplikation des Anregungsspektrums mit dem Spektrum des kausalen Dirac-Pulses, das komplex sein muss, da die Zeitfunktion (kausaler Dirac-Puls) weder gerade noch ungerade ist (Zuordnungssatz). Über eine Partialbruchzerlegung kann man zeigen, dass zum kausalen Dirac-Puls ein kotangensförmiges Imaginärteilspektrum gehört; das Realteilspektrum ist ein spektraler Dirac-Kamm. Dieses komplexe Spektrum müsste nun mit dem Anregungsspektrum multipliziert werden, was aber für die meisten Betrachtungen immer noch zu kompliziert ist.

Aus diesem Grund wird weiter idealisiert: Die (unbedämpfte) Saitenschwingung wird nicht bei $t = 0$ angeregt, sondern sie kommt aus der unendlichen Vergangenheit und dauert unendlich lang. Da sie periodisch stationär ist, kann eine Schwingungsperiode in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Als Schwingungsspektrum entsteht ein **Linienspektrum**, mit Frequenzlinien (Tönen) bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz.

Damit kann man die Gesamtschwingung als Summe überlagerter (addierter) Einzeltöne auffassen; sie werden Teiltöne, Partialtöne oder (wegen der ganzzahligen Frequenzrelationen) **Harmonische** genannt. Der Grundton ist die 1. Harmonische, bei der doppelten Grundfrequenz befindet sich die 2. Harmonische, die in der Musik auch 1. **Oberton** genannt wird. Entsprechendes gilt für die höheren Harmonischen (3. Harmonische = 2. Oberton etc.).

Die Realität unterscheidet sich von diesen Idealisierungen wesentlich. Ein Linienspektrum erfordert ein unendlich lang dauerndes, periodisches Signal. Periodisch bedeutet in der Signaltheorie, dass ein bestimmter Signalabschnitt in identischer Form unendlich oft wiederholt wird. Die Saite verliert beim Hin- und Herschwingen aber Energie, weswegen keine identischen Abschnitte wiederholt werden können. Die Saitenschwingung ist somit ein nichtperiodisches Signal, zu dem kein Linienspektrum gehört; die Spektrallinien werden vielmehr dämpfungsbedingt zu "Trichtern" verbreitert. Ursache für den Energieverlust sind **Dissipation** und Strahlung: Die Saitenenergie wird teils direkt in Wärme umgewandelt, teils als Schallenergie abgestrahlt. Ein weiterer Effekt, der für genaue Betrachtungen nicht ignoriert werden darf, ist die in Kap. 1.3 ausführlicher beschriebene frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit (**Dispersion**).

Auch wenn die Saitenschwingung eigentlich dispersiv und dissipativ erfolgt, ist zum Verständnis der Bewegungsabläufe trotzdem die vereinfachte idealisierte Betrachtung sinnvoll, solange nur kurze Zeitausschnitte betrachtet werden.

Beim idealisierten Anzupfen wird die Saite dreieckförmig ausgelenkt (**Abb. 1.2**). Wenn das Plektrum (oder der Finger) den Kontakt mit der Saite verloren hat, schwingt diese (idealisiert) frei und ungedämpft. Die Form der Querauslenkung kann man als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Teilwellen auffassen. Im Anzupf-Augenblick sind beide Teilwellen identisch, laufen für $t > 0$ aber in entgegengesetzter Richtung auseinander; die Beträge der Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind gleich. Die Auslenkung jeder Teilwelle ist für $t = 0$ am Kopf- bzw. Stegsattel gleich null, am Anzupfpunkt ist sie maximal. Die dreieckige Form setzt sich als Spiegelwelle am Kopf- bzw. Stegsattel punktsymmetrisch (ungerade) fort. Die Auslenkungen beider *Teilwellen* werden überlagert zur Auslenkung der Saite, Analoges gilt für alle Ableitungen, z.B. für die Geschwindigkeit.

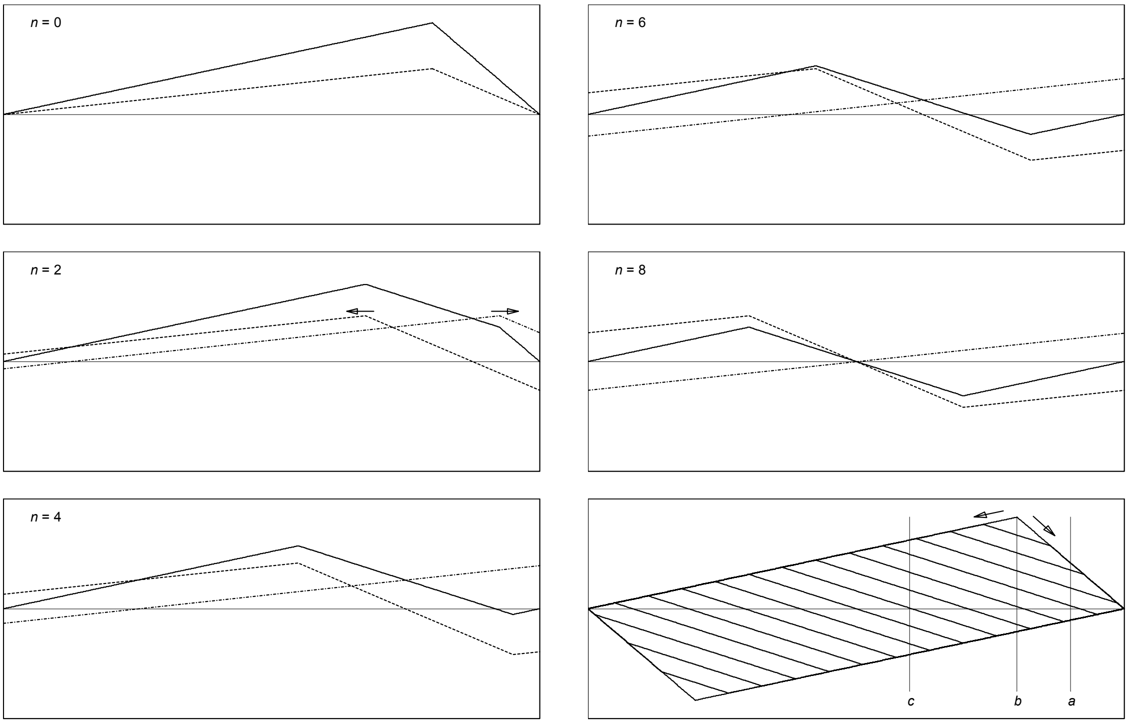

Abb. 1.2: Ausbreitung einer Dreieckwelle nach dem Anzupfen. Die Phasenverschiebung beträgt $\varphi = n \cdot \pi / 16$. Die Saite (dick gezeichnet) wird modellhaft als Überlagerung auseinanderlaufender Teilwellen interpretiert. Abszisse ist die Längskoordinate (Saitenlänge), Ordinate ist die Querauslenkung. Als Grenzlinie für die Saitenauslenkung ergibt sich ein Parallelogramm (rechts unten). Die Darstellungen sind keine Zeitfunktionen!

Die tatsächliche Saitenschwingung ist die Summe zweier in entgegengesetzte Richtungen laufender **Teilwellen**. Bei jeder dreieckförmig ausgelenkten und mit konstanter Geschwindigkeit laufenden Teilwelle ist die Schnelle jedes Saitenpunktes abschnittsweise konstant; jedoch erfolgt das Hinschwingen mit einer anderen Schnelle als das Zurückschwingen. Die Überlagerung der beiden Teilwellen führt auf ein unerwartetes Ergebnis: Jeder Saitenpunkt ist entweder in Ruhe, oder er schwingt mit der konstanten (!) **Schnelle** $\pm v$. Kopf- bzw. stegsattelnahe Saitenpunkte schwingen nicht etwa langsamer, sondern während kürzerer Zeit als Punkte aus der Saitenmitte (**Abb. 1.3**).

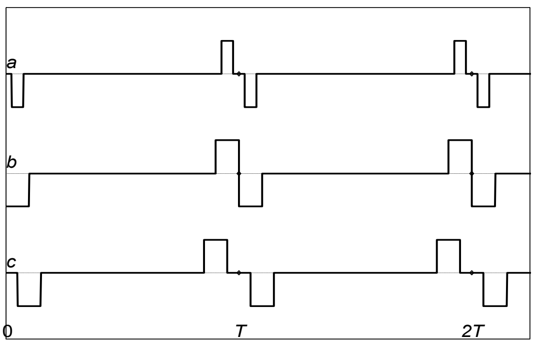

Abb. 1.3: Zeitfunktion der Saitenschnelle für drei verschiedene Punkte a, b, c (vergl. Abb. 1.2). Die Zeitfunktion der Auslenkung dieser Punkte kann hieraus durch Integration bestimmt werden. Als v-Spektrum ergibt sich die Überlagerung zweier Linienspektren mit phasenverschobener si-Hüllkurve. Eine zeitliche Integration entspricht im Frequenzbereich einer Division durch $j\omega$.

Bei dieser Modellbetrachtung ist wichtig, die tatsächlich (real messbare) Saitenschwingung von den Komponenten zu unterscheiden, aus denen sie modellhaft zusammengesetzt ist. Die Teilwellen sind nicht isoliert beobachtbar, sie sind "künstlich geschaffen", um die bildliche Vorstellung zu unterstützen.