

A. Anhang: Schwingungen und Wellen

A.1 Schwingungen und Wellen

Eine **Schwingung** ist ein Vorgang, bei dem die Schwingungsgröße (z.B. Auslenkung, Kraft, Stromstärke) nicht-monoton verläuft und mindestens zwei Extremwerte aufweist (DIN 1311). Die Mechanik spricht von Schwingungen, wenn sich Massen um ihre Ruhelage bewegen. Massen sind neben Federn und Dämpfern Elemente mechanischer Systeme. Enthält ein System keine Dämpfer, ist es verlustfrei bzw. ungedämpft, andernfalls verlustbehaftet bzw. gedämpft. Eine Masse kann kinetische Energie speichern, eine Feder potentielle Energie. Ein Dämpfer gehört nicht zu den speichernden Elementen, die an ihm verrichtete Energie wird irreversibel in Wärme umgewandelt. Die Anzahl aller voneinander unabhängiger Speicher bestimmt die **Ordnung** n des Systems.

Eine Masse, die an einer Feder hängend auf- und abschwinge kann, stellt ein System zweiter Ordnung dar. Um den Schwingungszustand des Systems zu *einem* Zeitpunkt vollständig zu beschreiben, sind n Zustandsgrößen (Feldgrößen) nötig. Beim Feder-Masse-System können dies z.B. Auslenkung und Geschwindigkeit sein. In der Systemtheorie heißen die Zustandsgrößen auch **Signalgrößen**; sie sind von den **Systemgrößen** (Masse, Steifigkeit, Impedanz ...) zu unterscheiden. Physikalische Kraft/Weg-Gesetze sowie Strukturgesetze (Topologie, Knotensatz, Maschensatz) bestimmen die Wechselwirkungen zwischen den Systemelementen und führen zur Differentialgleichung (DGL), deren Lösung die Schwingungsgleichung ergibt. Ein System n -ter Ordnung wird durch eine DGL n -ter Ordnung beschrieben. Bei mechanischen Systemen mit diskreten (örtlich konzentrierten) Elementen ist die unabhängige Variable zumeist die Zeit t ; die Signalgrößen werden in Abhängigkeit von t als Zeitfunktion dargestellt.

Schwingungen, die (ausschließlich) unter der Einwirkung einer externen Anregungsquelle ablaufen, heißen **erzwungene** Schwingungen. Schwingt die Quelle monofrequent mit f_0 und ist das System linear, so verlaufen alle Zustandsgrößen sinusförmig mit f_0 . Der Begriff *sinusförmig* erlaubt einen beliebigen Phasenwinkel, also auch einen Kosinusverlauf. Die beschreibende DGL ist bei externer Anregung inhomogen, d.h. sie enthält einen Quellterm (den die Mathematik *Störglied* nennt). Ohne momentane Anregung (= homogene DGL) ist das System entweder dauernd in Ruhe, oder es 'antwortet' auf vorangegangene Anregungen (es 'schwingt nach'). Dass ein schwingungsfähiges System nachschwingen kann, liegt an der Speicherfähigkeit seiner Masse(n) und Feder(n). Das **Nachschwingen** erfolgt bei einer Eigenfrequenz des Systems, und hier unterscheiden sich die Terminologien von Mechanik und Systemtheorie: Die Mechanik beschreibt die gedämpfte Schwingung als Produkt von Exponentialfunktion und Sinus (bzw. Kosinus), dem eine Frequenz zugeordnet wird. Die Systemtheorie erkennt im Ausschwingvorgang zwar eine Periode, aber keine Periodizität, und ordnet über das Fourier-Integral ein unendlich breites kontinuierliches Spektrum zu. Denn: Spektralanalyse ist Zerlegung in Summanden, nicht in Faktoren [siehe Literatur über Systemtheorie, z.B. 6].

Sind die Eigenschaften eines schwingungsfähigen Systems kontinuierliche Funktionen des Ortes, so heißt das System ein **Kontinuum**. Seine Zustandsgrößen sind Funktionen von Zeit und Ort (Raum), der Verbund der einzelnen Teilchenschwingungen heißt **Welle**. Die Abhängigkeit von zwei Variablen führt auf partielle DGL, die wiederum homogen (bei der freien Welle) oder inhomogen (bei der erzwungenen Welle) sein können.

A.1.1 Erzwungene Schwingung

Bei der erzwungenen (fremderregten, quellenerregten) Schwingung wird dem Schwingungssystem von außen Energie zugeführt. Beispielsweise kann die Auslenkung $\xi(t)$ der an einer Feder hängenden Masse sinusförmig mit der Frequenz f_0 eingepägt sein. Hiermit sind gleichzeitig die Geschwindigkeit, die Beschleunigung sowie weitere zeitliche Differentiale und Integrale definiert. Die zwischen Masse und Feder wirkende Kraft kann sowohl aus dem Newton'schen Trägheitsgesetz, als auch aus dem Hooke'schen Federgesetz berechnet werden.

Nicht auf einen Blick überschaubar werden die Schwingungen, wenn die Auslenkung nicht am masseseitigen Federende, sondern am gegenüber liegenden (oberen) Federende eingepägt wird. Die Masse vollführt nun Schwingungen mit f_0 , aber mit zunächst unbekannter Amplitude und Phase. Systemtheoretisch betrachtet liegt eine Übertragung (Abbildung) von einer Eingangsgröße (Federauslenkung) auf eine Ausgangsgröße (Massenauslenkung) vor. Im Zeitbereich wird das Problem durch die DGL oder durch Faltung mit der Impulsantwort gelöst, im Frequenzbereich durch die Übertragungsfunktion [6]. Analogiebetrachtungen zwischen elektrischen und mechanischen Systemen ermöglichen, dass die elektrische Signal- und Systemtheorie auch auf mechanische Systeme angewandt werden kann [3].

Fremderregung bedeutet nicht, dass eine erzwungene Schwingung *alleine* existieren muss. Trotz externer Zwangs-Erregung kann gleichzeitig auch noch eine freie Schwingung existieren, die eine Antwort auf vorangegangene Anregungen darstellt. Beim linearen System (lineare DGL) überlagern sich beide Schwingungen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

A.1.2 Freie Schwingung

Nach erfolgter externer Anregung kann sich eine freie Schwingung auf einer Eigenfrequenz des Systems ausbilden. Systeme erster Ordnung erzeugen keine *Eigenschwingung*^{*}, sondern nur exponentielle Ausgleichsvorgänge, Systeme zweiter Ordnung haben genau eine Eigenfrequenz, Systeme höherer Ordnung haben in der Regel mehrere Eigenfrequenzen. Beim linearen System (lineare DGL) überlagern sich alle eventuell vorhandenen Eigenschwingungen ungestört. Jede Eigenschwingung ist charakterisiert durch ihre Eigenfrequenz (Systemgröße), ihre Anfangsamplitude und –Phase (Signalgrößen) und durch ihre Dämpfung (Systemgröße). Beim ungedämpften System ist die Dämpfung null (Güte unendlich), die Schwingung klingt nicht ab. Beim gedämpften System klingt jede Eigenschwingung exponentiell ab. Sonderfälle ergeben sich bei zusammenfallenden Eigenfrequenzen (mehrfache Pole).

BEISPIEL: Ein System zweiter Ordnung hat die Eigenfrequenz f_E . Es wird von einer Quelle mit der Frequenz $f_1 \neq f_E$ angeregt. Hierzu wird die Quelle für die Zeitdauer $-T \leq t < 0$ eingeschaltet, bei $t = 0$ wird sie ausgeschaltet. Wie reagiert das System? Hierbei ist zu berücksichtigen, dass der geschaltete Sinus (Burst) nicht nur die Frequenz f_1 , sondern alle Frequenzen enthält (\rightarrow Fourier-Integral). Während $-T \dots 0$ entsteht eine erzwungene Schwingung, danach eine freie Schwingung mit f_E . Deren Frequenz und Dämpfung werden durch die Systemeigenschaften festgelegt, die Schwingungsamplitude und –phase ergibt sich aus den Werten zweier Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t = 0$. Falls zwischen $T_2 \dots T_3 > 0$ die Quelle erneut eingeschaltet wird, diesmal mit der Frequenz f_2 , überlagert sich zum ersten Ausschwingen die erzwungene zweite Schwingung, nach T_3 überlagern sich zwei freie Schwingungen (mit gleicher Frequenz f_E). Dieses Beispiel setzt voraus, dass das Schalten nicht die Systemeigenschaften verändert, dass also insbesondere die Quellimpedanz und die Struktur gleich bleiben. \diamond

* DIN 1311 nennt Kriechvorgänge "Schwingung im weiteren Sinn". Präzisere Definitionen \rightarrow Systemtheorie.

Die Lösungen der in den vorhergehenden Kapiteln aufgestellten Differentialgleichungen geben noch keine speziellen Hinweise auf die tatsächlichen Saitenschwingungen. Zu deren genauer Beschreibung müssen zusätzlich die Saitengeometrie und die Saitenanregung bekannt sein. Zur Saitengeometrie gehören Saitenlänge und Lagerdaten, mit Anregung entsteht eine erzwungene Welle, ohne Anregung (bzw. danach) eine freie. Bei Gitarren tritt eine erzwungene Welle nur in dem kurzen Moment auf, in dem das bewegte Plektrum Kontakt mit der Saite hat (Anschlag). Der danach kommende Ausklingvorgang ist eine freie Welle – zumindest, solange die Saite nicht gegen die Bünde prallt, oder erneut angezupft wird.

Die zur Beschreibung der Saitenschwingung benötigte Differentialgleichung (DGL) ist zunächst partiell, weil die abhängige Variable (z.B. ξ) von Ort z und Zeit t abhängt. Die DGL ist linear (1. Grades), weil die Variablen nur in erster Potenz vorkommen. Ohne Berücksichtigung der Biegesteifigkeit entsteht eine DGL 2. Ordnung, mit Biegesteifigkeit eine DGL 4. Ordnung. Sofern die Systemgrößen (z.B. Steifigkeit, Dichte, Geometrie) ihre Werte über der Zeit nicht ändern – was hier angenommen wird – enthält die DGL konstante Koeffizienten. Von besonderer Bedeutung sind **lineare DGL mit konstanten Koeffizienten** (linear/zeitinvariante Systeme bzw. **LZI-Systeme**), weil bei ihnen der **Überlagerungssatz** gilt (Superposition). Danach kann eine komplizierte Orts- oder Zeitfunktion als Summe einzelner Teilschwingungen aufgefasst werden, wobei sich diese Teilschwingungen gegenseitig nicht beeinflussen. Auch freie und erzwungene Schwingungen bzw. Wellen können gleichzeitig existieren, sie überlagern sich dann in ihrer Wirkung.

Im allgemeinen Fall überlagern sich bei der Saite erzwungene und freie Schwingungen (bzw. Wellen), was die Mathematik wie folgt ausdrückt: *Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL enthält man als Summe (Überlagerung) einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL.*

A.1.3 Erzwungene Welle

Bei der erzwungenen Welle wird einem Kontinuum (z.B. einer Saite) von außen Energie zugeführt. Da die Saitenschwingung von Ort und Zeit abhängt, sind komplizierte Anregungen formulierbar. Für die Praxis wichtig ist folgende Vereinfachung: Die Anregung erfolgt in Abhängigkeit von der Zeit *an nur einem Ort*. Für das Anzupfen mit einem spitzen Plektrum ist diese Näherung ein erster Schritt, Kap. 1.2.1 zeigt Detailergebnisse.

Eine weitere Vereinfachung ist bei der Definition der anregenden Größe erforderlich. Biegesteife Saiten werden durch Kraft, Moment, Auslenkung und Winkelgeschwindigkeit beschrieben. Jede dieser Größen kann (auch kombiniert) als Anregungsgröße wirken. Die Beschreibung lässt sich vereinfachen, wenn die Anregungsgröße als direkte Saiteneingangsgröße definiert werden kann. Eine indirekte Anregung liegt z.B. vor, wenn die definierte Bewegung eines Punktes (Finger) über eine Feder (Plektrum) auf die Saite einwirkt. Bei einer direkten Anregung ist die direkt an der Saite wirkende Größe (z.B. Auslenkung) in ihrem zeitlichen Verlauf definiert.

Die Systemtheorie ordnet der direkten Anregung die Quellimpedanz (Innenwiderstand) null oder unendlich zu, der indirekten Anregung einen dazwischen liegenden Wert. Die direkte Anregung (**Einprägung** einer Signalgröße) ist leichter zu beschreiben. Besonders anschaulich ist die Einprägung der Querauslenkung (am konstanten Ort z_0).

Nehmen wir als Beispiel an, dass die Querauslenkung $\xi(z_0, t)$ an einem bestimmten Ort z_0 als Funktion von t eingepreßt ist. Hiervon ausgehend können mehrere Fragen formuliert werden:

a) *nach welcher Funktion verläuft dann die Auslenkung $\xi(z, t)$ an einem anderen Ort z ?*

Dies ist ein Standardproblem der Systemtheorie, das mit Impulsantwort und Faltung gelöst wird (siehe später).

b) *Nach welcher Funktion verlaufen die anderen Signalgrößen (F , M etc.)?*

Am selben Ort sind leistungsbildende Größen (F , v oder M , w) über Saiten-Impedanzen verknüpft, die Überkreuzverknüpfung ist über Koppelterme definiert. Die Abbildung auf einen anderen Ort wird wie bei a) gelöst.

c) *Welche Schwingung stellt sich ein, nachdem die Anregung beendet wurde?*

Es entsteht eine freie Welle, deren Startbedingungen von den Endbedingungen der vorhergehenden Anregung definiert werden.

Zu a): Der Bernoullische Ansatz nimmt als Lösungsfunktion die harmonische Exponentielle, die sinusförmige Orts- und Zeitfunktionen ergibt. Da die Saite bei den vorhergehenden Berechnungen verlustfrei modelliert werden konnte, bleibt die Amplitude einer monofrequenten Schwingung bei der Ausbreitung erhalten, nur die Phase verändert sich. Somit kann am Ort z nur wieder eine sinusförmige Schwingung gleicher Frequenz und gleicher Amplitude entstehen, deren Phase gegenüber der Anregungsphase gedreht ist. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der homogenen Saite (ortsunabhängige Saitenparameter) von z unabhängig ist, ist die Phasendrehung proportional zur zurückgelegten Distanz. Bei der biegesteifigkeitsfreien Saite ist zudem die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzunabhängig (linearphasiges System), und somit ist die Phasendrehung proportional zur Frequenz und zur Distanz. Bei der biegesteifen Saite tritt Dispersion auf, die Phase wächst mit zunehmender Frequenz überproportional.

Beliebige, nichtsinusförmige Signale müssen in ihre sinusförmigen Komponenten zerlegt werden (Fourier-Analyse), die dann einzeln von z_0 nach z abgebildet werden; anschließende sind die transformierten Komponenten wieder zusammzusetzen (Fourier-Synthese). Alternativ kann die gesamte Abbildung auch in einem Schritt mit dem **Faltungsintegral** durchgeführt werden: Das Anregungs-Zeitsignal ist hierzu mit der Impulsantwort der Saite zu falten. Die Impulsantwort ist bei der biegesteifigkeitsfreien Saite ein zeitverschobener Dirac-Impuls (dispersionsfreies Laufzeitsystem, Delayline), bei der biegesteifen Saite eine Allpassfunktion (Kap. 2 bzw [6]). Reflexionen lassen sich als Systemantworten auf zusätzliche Spiegelquellen modellieren und überlagern.

Wie Abb. 1.19 zeigt, kann beim normalen Anzupfen der Plektrum/Saite-Kontakt einige Millisekunden betragen. Dies ist die Zeitdauer, während der eine erzwungene Schwingung vorliegt. Die Anregung breitet sich während dieser Zeit über die ganze Saite aus (Abb. 1.10), so dass im strengen Sinn nicht mehr von einer impuls- oder sprunghaften Anregung gesprochen werden darf.

In den meisten Fällen kann der von Gitarrenverstärker/Lautsprecher erzeugte Schall auf die Gitarre zurückwirken. Falls mit hoher Verstärkung gespielt wird, erfolgt eine wesentliche Anregung der Gitarrensaite durch den vom Lautsprecher erzeugten Luftschall, die bis zur Selbsterregung (Rückkopplungspfeifen) führen kann. Das Gesamtsystem ist in diesem Fall aktiv und nichtlinear, die Schwingung wird nicht mehr als frei, sondern als selbsterregt bezeichnet.

A.1.4 Freie Welle

Freie Wellen sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung (Kap. 2). Bei flüchtiger Betrachtung könnte man vermuten, dass freie Wellen nur existieren können, wenn keine externen Kräfte einwirken. Tatsächlich bewirken von außen angreifende Kräfte, dass erzwungene Wellen entstehen. *Zusätzlich* können aber immer auch freie Wellen existieren. Da sie kinetische und potentielle Energie enthalten, ist eine Entstehung 'aus dem Nichts' aber unmöglich.

Die partielle Wellen-Differentialgleichung hat zwei Variable: Zeit und Ort. Wird sowohl die örtliche, als auch die zeitliche Periodizität von außen aufgezwungen, spricht man von einer raum-zeitlich erzwungenen Welle, die abgekürzt **erzwungene Welle** genannt wird. Sofern die externe Anregung nur in einem örtlich begrenzten Bereich erfolgt, bilden sich außerhalb sog. **räumlich freien Wellen** aus. Erfolgt die externe Anregung zeitlich begrenzt, so entsteht danach eine raum-zeitlich freie Welle, kurz eine **freie Welle**.

In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Differentialgleichungen ohne äußere Kräfte aufgestellt (homogene DGL), ihre Lösungen beschreiben freie Schwingungen. Als Beispiel soll eine Transversalwelle (Abb. A3.1) untersucht werden:

$$\Psi \cdot \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial z^2} = m' \cdot \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} \quad \underline{\xi} = \hat{\xi} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{DGL und Lösung}$$

Die Lösung ist eine harmonische Schwingung mit Amplitude $\hat{\xi}$, Anfangsphase φ und Kreisfrequenz ω . Zum Nachweis, dass die Lösung zur DGL passt, differenziert man $\underline{\xi}$ je zweimal nach dem Ort und nach der Zeit und setzt diese Ableitungen in die DGL ein:

$$\Psi \cdot (-k^2 \underline{\xi}) = m' \cdot (-\omega^2 \underline{\xi}) \quad \} \quad \Psi \cdot k^2 = m' \cdot \omega^2 \quad \text{charakteristische Gleichung}$$

Die linke Gleichung darf für jedes $\underline{\xi}$ durch $\underline{\xi}$ gekürzt werden ($\underline{\xi} \equiv 0$ ist als trivialer Fall uninteressant). Die charakteristische Gleichung liefert die Wellenzahl k als Funktion von Kreisfrequenz und Saitenparametern. Setzt man k in die Lösung ein, so enthält diese noch die drei Parameter Amplitude $\hat{\xi}$, Anfangsphase φ und Kreisfrequenz ω . Dieses Ergebnis besagt, dass sich auf der (unendlich langen) Saite Transversalwellen mit *jeder* Amplitude, Anfangsphase und Kreisfrequenz ausbreiten können. Können – nicht müssen! Die tatsächlich vorhandenen Schwingungen hängen von der vorher erfolgten Anregung ab – diese definiert die Anfangsbestimmungen, und damit die o.a. Parameter.

A.1.5 Stehende Wellen

Eine stehende Welle ergibt sich, wenn in einem Gebiet gleichzeitig zwei gleichfrequente Wellen überlagert werden, deren Ausbreitungsrichtung entgegengesetzt ist. Die komplexe Schreibweise der Wellengleichung führt zu:

$$\underline{\xi}(z, t) = \hat{\xi} \cdot \left(e^{j(\omega t + kz)} + e^{j(\omega t - kz)} \right) = \hat{\xi} \cdot \hat{e}^{j\omega t} \cdot 2 \cos(kz); \quad e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2 \cos \varphi$$

Der Kosinus kann hierbei als ortsabhängiger Amplitudenterm aufgefasst werden: An den Nullstellen der Kosinusfunktion entstehen 'Knoten' (engl. nodes) der stehenden Welle, an den Maxima 'Bäuche' (antinodes). Der Abstand zweier benachbarter Knoten bzw. Bäuche entspricht einer halben (!) Wellenlänge.

Wenn die Amplituden der in entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Wellen genau gleich groß sind, ergibt sich eine reine stehende Welle, andernfalls eine Kombination aus stehender und fortschreitender Welle. Eine fortschreitende Welle transportiert Energie in Richtung ihrer Ausbreitung, eine stehende Welle nicht.

Es gibt erzwungene und freie stehende Wellen, je nach dem, ob eine Anregungsquelle vorhanden ist oder nicht. Bei der Gitarre dauert das Anzupfen nur wenige Millisekunden lang; danach erzeugen die immer wieder an den Lagern reflektierten fortschreitenden Wellen eine freie stehende Welle, deren Amplitude langsam abklingt. Deren Eigenfrequenzen errechnen sich aus der oben angegebenen Kosinus-Funktion; für die tiefste Eigenfrequenz entspricht der Knotenabstand gerade der Saitenlänge. Die folgende **Abb. A1.1** zeigt zum Vergleich eine fortschreitende und eine stehende Querwelle.

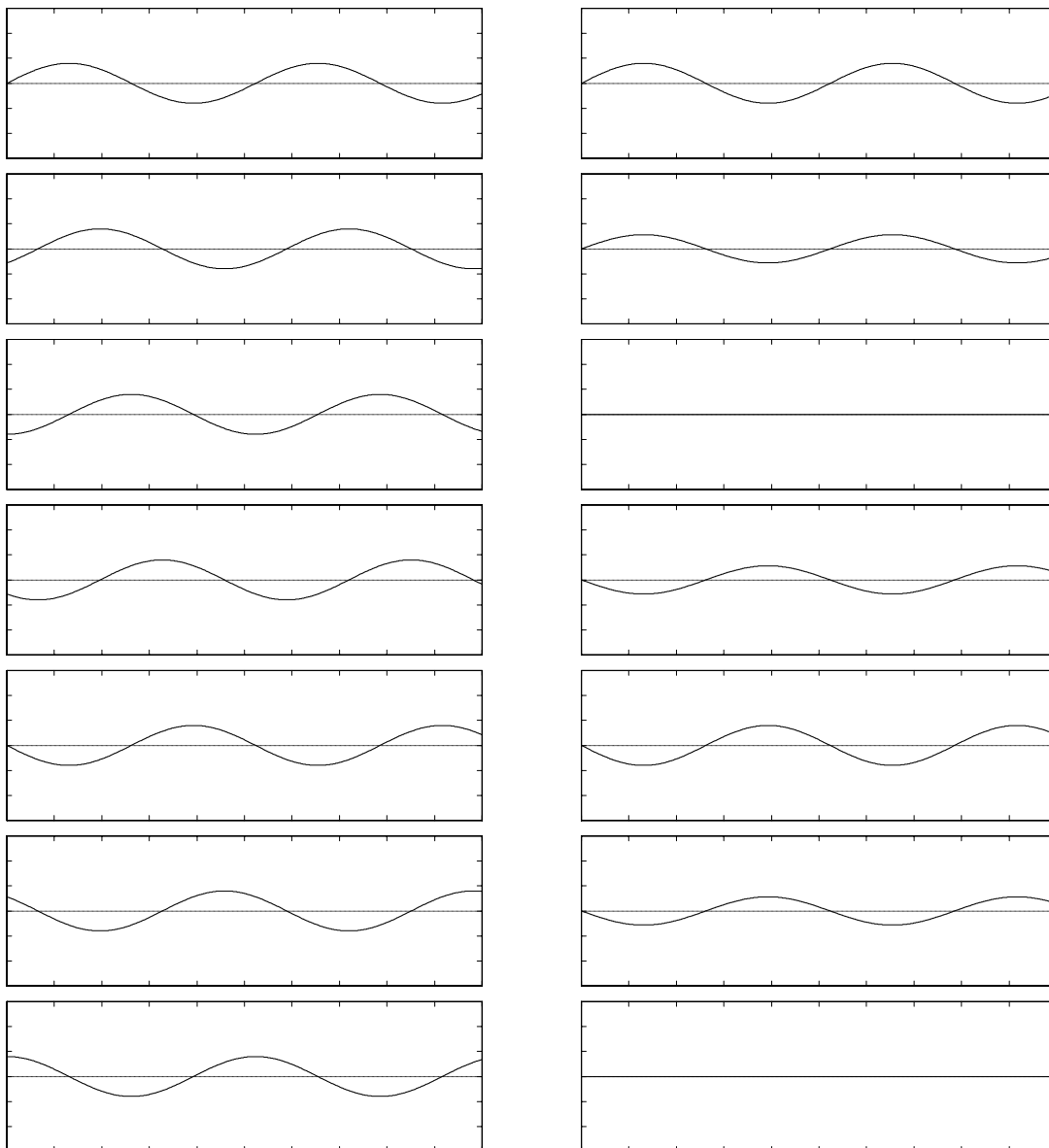


Abb. A1.1: Fortschreitende Querwelle (links), stehende Querwelle (rechts); Phaseninkrement = $\pi/4$.

Siehe auch: <http://homepages.hs-regensburg.de/~elektrogitarre> => Animationen

A.2 Longitudinalwellen

Bei einer Longitudinalwelle fallen Schwingungs- und Ausbreitungsrichtung zusammen. (Die Diskussion der für die Gitarre wichtigeren Transversalwelle erfolgt in A.3). Zur Berechnung teilt man das Übertragungsmedium durch ebene, querstehende, äquidistante Trennflächen in dünne Scheiben, die bei Wellenausbreitung sowohl ihre Position in Ausbreitungsrichtung verändern, als auch ihre Dicke. Die Trennflächen stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, sie bilden Ebenen gleicher Normalspannung bzw. gleicher Auslenkung. Die Dickenänderung ist über das Hooke'sche Gesetz mit der angreifenden Kraft verbunden, die ihrerseits über das Newton'sche Trägheitsgesetz mit der bewegten Scheibenmasse verknüpft ist.

A.2.1 Reine Longitudinalwellen

Die Signalgrößen (Feldgrößen) sind Kraft F und Longitudinalschnelle v , bzw. davon abgeleitet Auslenkung und Beschleunigung. Die Systemgrößen sind die Materialdaten s_L und ρ . Die **Longitudinal-Steifigkeit** s_L kennzeichnet Materialverformungen bei großer Querabmessung, d.h. bei verhinderter Querkontraktion. Bei der Gitarrensaite, deren Querabmessung sehr gering ist, tritt dieser Belastungsfall nicht auf. Zugspannung in Längsrichtung führt hier zu einer Verlängerung der Saite bei gleichzeitiger Durchmesser verringering. Somit entstehen neben Längsschwingungen auch gekoppelte Dickenschwingungen. Die Kombination beider Schwingungen wird **Dehnwelle**, Schnürwelle oder quasilongitudinale Welle genannt.

A.2.2 Saiten-Dehnwellen

Dehnwellen, die auch quasilongitudinale Wellen genannt werden, treten in Übertragungsmedien auf, deren Querabmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind, also z.B. in Platten, Stäben, oder Instrumentensaiten. Die *primären* Kräfte und Bewegungen verlaufen parallel zur Saitenlängsachse, in der hierzu senkrecht stehenden Querrichtung treten aber zusätzliche *Sekundäreffekte* auf: Dehnung in Längsrichtung verringert den Saitendurchmesser, Stauchung vergrößert ihn. Die prozentualen **Änderungen der Querabmessungen** sind zwar sehr klein, aber wesentlich. Bei der reinen Longitudinalwelle bleiben auch beim Einwirken von Längskräften die Querabmessungen konstant; dies ist nur möglich, wenn gleichzeitig Querkräfte wirken (dreiachsiger Spannungszustand). Bei den Dehnwellen treten nur Längskräfte (bzw. Längsspannungen) auf, und genau für diesen Zustand wurde der **Elastizitätsmodul** E als Proportionalitätskonstante definiert: Die relative Längenänderung $\Delta z/z$ ist proportional zur Längsspannung σ_z (= Längskraft / Querschnittsfläche):

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0 \quad E = \text{Elastizitätsmodul} = \text{Young's Modulus}$$

Die als Sekundäreffekt in x - und y -Richtung hervorgerufene Durchmesseränderung hängt über die Querkontraktionszahl μ (Poissonsche Zahl) von der Längsdehnung ab:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_z \quad \text{Querkontraktion}$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil eine Vergrößerung in Längsrichtung eine Verkleinerung in Querrichtung zur Folge hat. Die dimensionslose Querkontraktionszahl μ ist materialabhängig, für Stahl beträgt sie ca. 0,3.

Aus dem Hooke'schen und dem Newton'schen Gesetz kann die Schwingungs-Differentialgleichung der (verlustfreien) Dehnwelle aufgestellt werden:

$$E \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 F_z}{\partial t^2}; \quad E \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} \quad \text{Differentialgleichung}$$

Die **Differentialgleichung** ist vom gleichen Typ für die Längskraft F_z und für die Längsschnelle v_z bzw. deren Integral (Auslenkung) bzw. deren Differential (Beschleunigung). Zu ihrer Lösung eignet sich der Produktansatz nach DANIEL BERNOULLI, bei dem in einen zeit- und einen ortsabhängigen Faktor separiert wird (hier am Beispiel der Längskraft F_z):

$$\underline{F}_z = \hat{F}_z \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} = \underline{\hat{F}}_z \cdot e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{Lösungsansatz}$$

F_z ist hierbei die zeit- und ortsabhängige Längskraft der Welle, die nicht mit der Saitenspannkraft \mathcal{P} verwechselt werden darf. Sie wird – wie in der Signaltheorie üblich – als harmonische Exponentielle formuliert, d.h. als umlaufender Zeiger. Dessen Projektion auf die reelle Achse entspricht der tatsächlich auftretenden Kraft, die imaginäre Ergänzung zur komplexen Größe tritt in der Praxis nicht in Erscheinung. Gleichwohl ist die komplexe Darstellung nicht etwa aufwändiger, sondern z.B. bei Integration / Differentiation einfacher und kürzer.

$\underline{\hat{F}}_z$ ist die komplexe Amplitude, die den Anfangsphasenwinkel φ für $t = 0$ und $z = 0$ enthält. Die **Kreisfrequenz** ω ist über 2π mit der zeitlichen **Periodendauer** T verbunden, so wie die **Wellenzahl** k über 2π mit der örtlichen Periode (**Wellenlänge** λ) verbunden ist. Beide Größen hängen über die **Phasengeschwindigkeit** c_P (= Ausbreitungsgeschwindigkeit) zusammen:

$$k = 2\pi/\lambda \quad \omega = 2\pi/T \quad \omega/k = c_P = \sqrt{E/\rho} \quad \text{Wellengrößen}$$

Für das zeitliche partielle Differential ist der Ort z eine Konstante, für das örtliche partielle Differential ist die Zeit t eine Konstante. Für festgehaltenen Zeitpunkt t (Blitzlichtaufnahme) ist der örtliche Kraftverlauf sinusförmig, wie auch für festgehaltenen Ort (Kraftsensor) der zeitliche Kraftverlauf sinusförmig ist. Der Begriff *sinusförmig* erlaubt eine beliebige Anfangsphase; der exakte Wert wird durch das Anregungssignal festgelegt. Solange das System als **linear** und **zeitinvariant** betrachtet wird (LTI- bzw. LZI-System), kann durch Überlagerung (Superposition) jedes beliebige Signal synthetisiert werden. Der Lösungsansatz gilt somit nicht nur für sinusförmige Schwingungen, sondern für alle Signalformen. **Abb. A2.1** zeigt eine Momentaufnahme einer sinusförmigen (monofrequenten) Dehnwelle, in **Abb. A2.2** sind hierzu verschiedene Phasenlagen dargestellt.

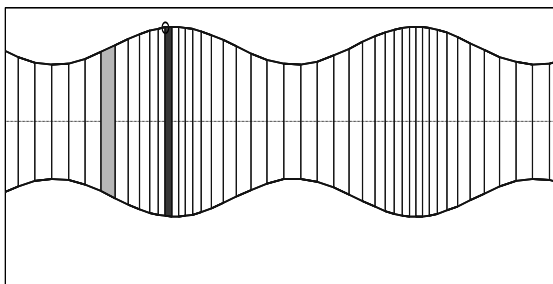


Abb. A2.1: Monofrequente Dehnwelle

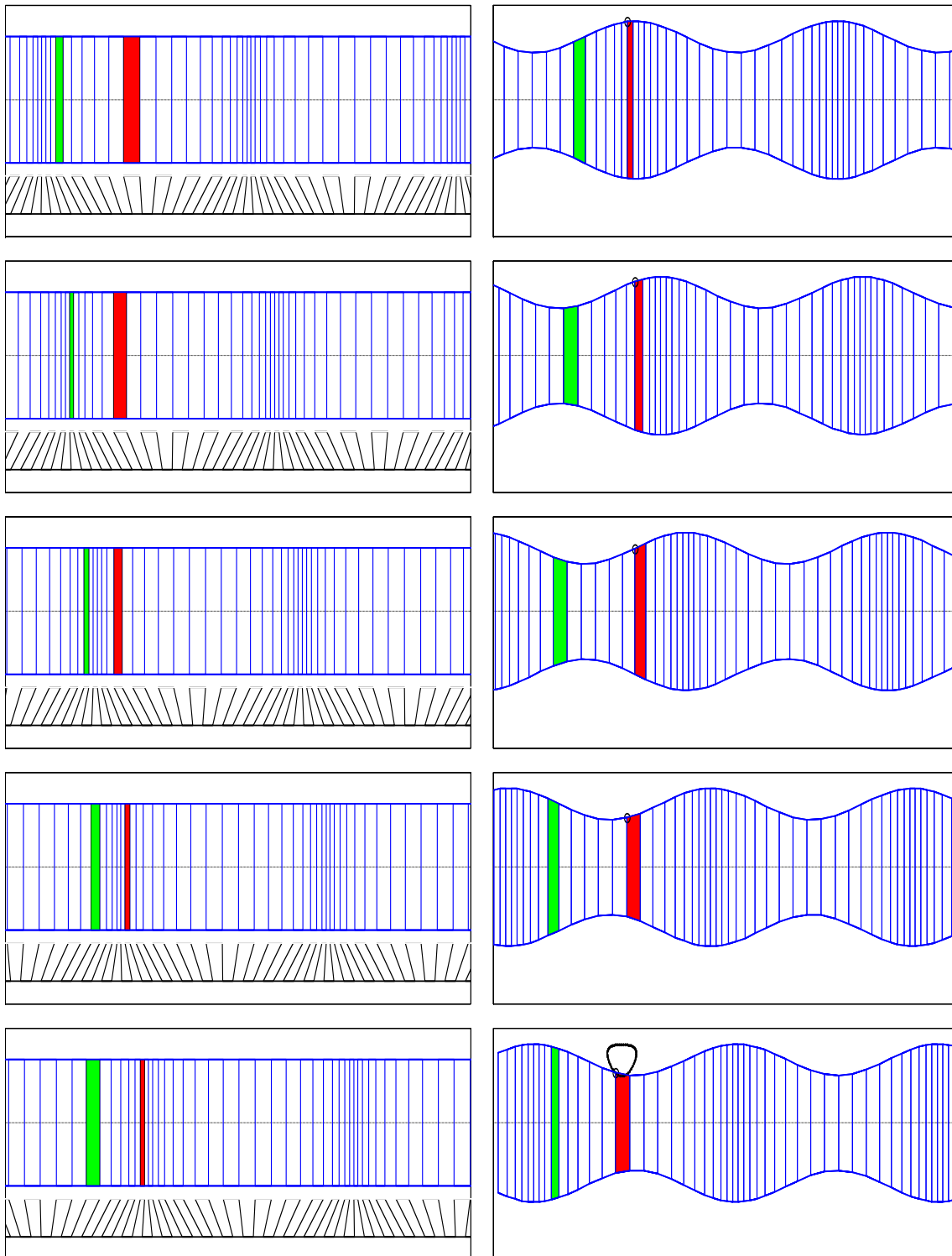


Abb. A2.2: Fortschreitende Longitudinalwelle (links), fortschreitende Dehnwelle (rechts). Das Phaseninkrement beträgt jeweils $\pi/4$. Die Verdichtungen bzw. Verdünnungen laufen von links nach rechts durch das Bild, die (in zwei Fällen dunkel gefärbten) Teilvolumina schwingen um ihre Ruhelage. Bei der Longitudinalwelle ist unter der Welle die Verschiebung durch schräge Striche angedeutet. Die Quer-Einschnürungen der Dehnwelle sind sehr stark übertrieben. Siehe auch: <http://homepages.hs-regensburg.de/~elektrogitarre> => Animationen

A.3 Transversalwellen

Bei der Transversalwelle bewegen sich alle Mediumteilchen quer zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Zur Berechnung teilt man das Medium wie bei der Longitudinalwelle in dünne Scheiben, die sich jetzt aber nicht parallel zur Ausbreitungsrichtung verschieben, sondern (unter zusätzlicher Formänderung) senkrecht hierzu. Im einfachsten Fall schwingt jeder Scheibenschwerpunkt in derselben Schwingungsebene (ebene oder lineare **Polarisation**), im allgemeinen Fall schwingt jeder Scheibenschwerpunkt auf einer Raumkurve (z.B. $z = \text{const.}$, zirkulare oder elliptische Polarisation). Im Unterschied zur Biegewelle (A.4) bleiben die ebenen Trennflächen der Scheiben aber stets parallel. (**Abb. A3.2, Abb. A4.2**).

A.3.1 Reine Transversalwellen

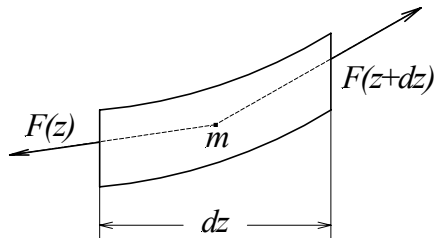
Wenn sich alle Mediumteilchen mit identischer Geschwindigkeit in dieselbe Richtung bewegen, entsteht keine Wellenausbreitung; dieser Fall ist im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen nicht interessant. Bei einer Transversalwelle ist die Querbewegung orts- und zeitabhängig, mit jeweils nichtkonstanten Abhängigkeiten. Dies erfordert im Medium eine Formänderung, die bei der reinen Transversalwelle einen Quader durch die angreifenden Scherspannungen zu einem Parallelepiped (schiefes Prisma) verformt. Die Systemgrößen sind die Materialdaten **Dichte** ρ und **Schubmodul** G . Bei einer Saite wäre dieser Spannungszustand allenfalls zu beachten, wenn sie ohne Vorhandensein einer Spannkraft bewegt würde. Da dieser Betriebsfall aber untypisch ist, wird er nicht weiter verfolgt.

A.3.2 Saiten-Transversalwellen

Das Newton'sche Trägheitsaxiom besagt, dass die Geschwindigkeit einer Masse nur durch Krafteinwirkung geändert werden kann. Jedes der in Querscheiben geschnittene Saitenstückchen hat eine Masse, die sich aus Dichte und Volumen ergibt. An den Scheibentrennflächen greifen mechanische Spannungen an, die (gemittelt und mit der Querschnittsfläche multipliziert) *eine* externe Kraft pro Trennfläche ergeben. Die Trennflächen stehen senkrecht auf der Saitenachse (z -Achse), jede externe Kraft kann bezüglich der Trennfläche in eine Normal- und Tangentialkomponente zerlegt werden. Im Ruhezustand der Saite ist die Tangentialkomponente null, die Normalkomponente entspricht der **Spannkraft** Ψ . Bei einer Transversalschwingung bewegen sich die Saitenstückchen nur in Querrichtung, die Normalkraft enthält somit keinen Wechselanteil; sie verharrt auf dem konstanten Wert Ψ . Die auf beiden Seiten des Saitenstückchens angreifenden Tangentialkräfte ergeben als Vektorsumme die **Querkraft**, die für die Querbewegung verantwortlich ist (Verluste vernachlässigt).

Die Masse jedes Saitenstückchens denkt man sich im jeweiligen Schwerpunkt konzentriert, die Richtungen der externen Kräfte folgen den zwischen den Schwerpunkten liegenden Verbindungslinien (**Abb. A3.1**). Wenn $\xi(z,t)$ die orts- und zeitabhängige Saitenauslenkung beschreibt (ebene Polarisation), dann ist $\partial\xi/\partial z$ die Steigung der Saite bzw. der Kräfte. Damit eine von null verschiedene Querkraft entsteht, müssen die links- und rechtsseitige Steigung unterschiedlich sein; andernfalls wären wegen der gleichen Normalkräfte auch die Tangentialkräfte gleich, und die Resultierende somit null. Eine von null verschiedene Querkraft kann folglich nur an Stellen auftreten, an denen die *Änderung* der Steigung (d.h. $\partial^2\xi/\partial z^2$) ungleich null ist, d.h. an Stellen mit von null verschiedener **Krümmung**.

Die *längenspezifische* Querkraftdifferenz $F_q(z+dz) - F_q(z)$ ergibt sich für kleine Amplituden näherungsweise zu: $\Psi \cdot \partial^2 \xi / \partial z^2$; sie entspricht dem Produkt aus längenspezifischer Masse $m' = \rho S$ und Querschleunigung $\partial^2 \xi / \partial t^2$. Die Auswirkungen der Schubbeanspruchung werden vernachlässigt. Die hieraus entstehende partielle Differentialgleichung 2. Ordnung wird wie bei der Longitudinalwelle mit dem Bernoullischen Ansatz gelöst:



$$\Psi \cdot \partial^2 \xi / \partial z^2 = m' \cdot \partial^2 \xi / \partial t^2; \quad m' = \rho S$$

$$c_P = \sqrt{\Psi / m'}; \quad k = \omega \sqrt{m' / \Psi}$$

$$\underline{\xi} = \hat{\xi} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} = \underline{\hat{\xi}} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

Abb. A3.1: Gekrümmtes Saitenstückchen mit den beiden angreifenden externen Kräften. Die flächennormale z -Komponente der externen Kraft entspricht der konstanten (!) Spannkraft Ψ . Die Querkräfte greifen tangential an den (normal zur z -Richtung stehenden) Grenzflächen an. Die Transversalwelle hat zwei Wellengrößen (auch Signalgrößen genannt): Die Schnelle, und die Querkraft. Die Querkraftdifferenz entspricht der Trägheitskraft.

Sowohl bei der Longitudinal- als auch bei der Transversalwelle enthält die Lösung eine komplexe e -Funktion, mit dem zeitabhängigen Term ωt und dem ortsabhängigen Term kz . Die bei der Transversal- (Longitudinal-) -welle beschreibbaren Signalgrößen sind Querkraft (*Längskraft*), Querschnelle (*Längsschnelle*) sowie deren zeitliches Integral/Differential. Die Zeitabhängigkeit der Saitenschwingung (ωt) wird bei der erzwungenen Schwingung von der Fremderregung vorgegeben, bei der freien Schwingung von der Geometrie und der Phasengeschwindigkeit (Kap. A.1). Die Ortsabhängigkeit (kz) wird in beide Fällen von der Phasengeschwindigkeit c_P bestimmt.

Es ist besonders zu beachten, dass die Steifigkeit der hier beschriebenen Transversalbewegung nicht von den Materialeigenschaften (Elastizitätsmodul E) hervorgerufen wird, sondern ausschließlich von der Saitenspannkraft Ψ . Für einfache Wellenausbreitungen über kurze Distanzen sowie niederfrequente Betrachtungen ist diese Beschreibung ausreichend. Bei genauerer Analyse zeigt sich aber, dass neben der Spannsteifigkeit auch die (material- und geometrieabhängige) **Biegesteifigkeit B** zu berücksichtigen ist. Sie bewirkt, dass die Signalausbreitungsgeschwindigkeit nicht konstant ist, sondern mit zunehmender Frequenz zunimmt. Bei der formalen Beschreibung müssen neben den Kräften auch die Drehmomente, und neben den translatorischen die rotatorischen Bewegungsgrößen berücksichtigt werden (Kap. A.4).

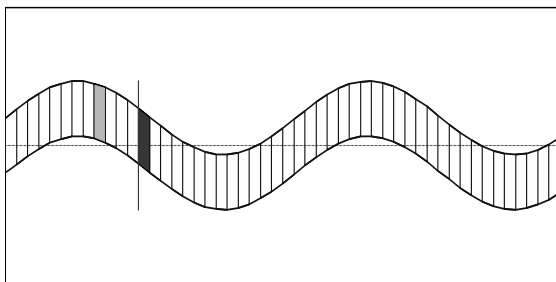


Abb. A3.2: Monofrequente Transversalwelle

A.4 Biegewellen

Die in den vorhergehenden Kapiteln diskutierten Longitudinal- und Transversalwellen lassen sich durch Differentialgleichungen 2. Ordnung beschreiben. Genauere Untersuchungen an schwingenden Saiten zeigen aber, dass neben den translatorischen Größen Kraft und Schnelle auch die rotatorischen Größen **Moment** und **Winkelgeschwindigkeit** berücksichtigt werden sollten. Als Konsequenz hiervon ergibt sich eine Differentialgleichung 4. Ordnung, die nun auch **dispersive** (frequenzabhängige) Wellenausbreitung beschreiben kann.

A.4.1 Zugspannungsfreier Balken, reine Biegewelle

Bei der reinen Transversalwelle (A.3.1) wirkt den angreifenden Querkräften die Schubsteifigkeit entgegen, die durch die Materialgröße **Schubmodul** G beschrieben wird. Praktische Versuche zeigen aber, dass die wirksame Steifigkeit krümmungsabhängig ist, und dieses Verhalten wird besser durch ein spannungsbelastetes Mediumteilchen mit nichtparallelen Trennflächen beschrieben (Abb. A4.1). Da die effektiven Saitenquerabmessungen (0,2 – 0,5 mm) klein gegenüber der Wellenlänge (1 – 130 cm) sind, dürfen Schubdeformationen und rotatorische Trägheitsmomente vernachlässigt werden (Euler-Bernoulli-Theorie des Biegestabes). Daraus ergibt sich als mediumkennzeichnende Größe die **Biegesteifigkeit** B . Diese hängt ab vom **Elastizitätsmodul** E und vom axialen Flächen(trägheits)moment I , das bei der zylindrische Saite vom **Durchmesser** D bestimmt wird:

$$B = E \cdot I = E \cdot D^4 \pi / 64 \quad \text{Biegesteifigkeit}$$

Bei der massiven Saite ist D der Außendurchmesser, bei der umspunnenen Saite ist D in erster Näherung der Kerndurchmesser. Für genauere Beschreibungen wird auch ein Steifigkeitsanteil der Umspinnung zu berücksichtigen sein, der wesentlich davon abhängt, unter welcher Vorspannung die Umspinnung aufgebracht wurde.

Zum Aufstellen der Differentialgleichung teilt man die Saite in differentiell kleine Scheibchen mit der Breite dz . Die kreisförmigen Trennflächen stehen im Ruhezustand senkrecht auf der Längsachse (z -Achse, **Abb. A4.1**). Bei Anregung können sie ihre Lage und Richtung ändern, bleiben aber stets eben und stets senkrecht zur lokalen (gekrümmten) Saitenachse. Der Mittelpunkt jeder Trennfläche kann sich senkrecht zur z -Achse in ξ -Richtung bewegen, zusätzlich ist eine Drehung in der Bildebene erlaubt. Die seitliche Verschiebung wird mit $\xi(z,t)$ bezeichnet, die Drehung mit $\beta(z,t)$. Die zwischen zwei benachbarten Trennflächen eingeschlossene Scheibchenmasse dm bleibt stets dieselbe.

Die Richtung β jedes Trennflächenvektors ist zugleich die Richtung der örtlichen Saitenachse, die der örtlichen Ableitung (Steigung) der ξ -Auslenkung entspricht:

$$\beta = \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad w = \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{Bewegungsgrößen}$$

Hierbei ist β der Drehwinkel, $v = v_\xi$ ist die Schnelle (Teilchen-Geschwindigkeit) in ξ -Richtung, und w ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung. Die Winkelgeschwindigkeit w darf nicht mit der Kreisfrequenz ω verwechselt werden! w ist amplitudenabhängig, ω nicht.

Die Ortsabhängigkeit des Drehwinkels β bewirkt eine Verformung des Saitenscheibchens. Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, dass bei der geraden Biegung die Krümmung $\partial^2 \xi / \partial z^2$ über die Biegesteifigkeit B mit dem Moment* M verknüpft ist:

$$M = -B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad \text{gerade Biegung}$$

Das Minuszeichen entspricht einer bei [11] gewählten Konvention, Mechanik-Lehrbücher schreiben hier gerne ein Pluszeichen. Sofern die Vorzeichendefinition für alle Berechnungen in gleicher Weise eingehalten wird, sind beide Betrachtungen äquivalent.

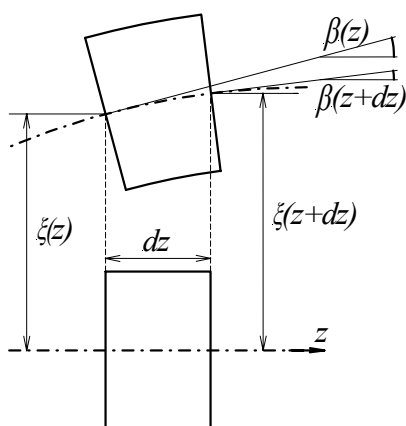
Die Beziehung zwischen der Querkraft $F = F_\xi$ und dem Moment M ergibt sich direkt aus dessen fundamentaler Definition: Eine Kraft F erzeugt bezüglich einer orthogonalen, im Abstand dz entfernten Achse das Moment $dM = Fdz$. In differentieller Schreibweise, mit Vorzeichenkonvention nach [11]:

$$F = -\frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{Querkraft, Moment}$$

Das Trägheitsaxiom liefert die Beziehung zwischen Querkraft, Querbeschleunigung und Scheibchenmasse. Örtliches Differenzieren nach z ergibt:

$$-\frac{\partial F}{\partial z} = m' \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad m' = \rho \cdot D^2 \pi / 4 = \rho \cdot S \quad \text{Trägheitsaxiom}$$

Bei massiven Saiten ist ρ die Materialdichte, D ist der Durchmesser, S die Querschnittsfläche. Bei umspannenen Saiten kann man für D den Außendurchmesser einsetzen, muss dann aber für ρ eine mittlere Dichte $\bar{\rho}$ verwenden, die den Luftanteil und ggf. den Dichte-Unterschied zwischen Kern und Umspinnung berücksichtigt (Kap. 1.2).



$$\beta(z) = \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

$$\beta(z+dz) = \beta(z) + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz$$

$$\xi(z+dz) = \xi(z) + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz$$

Abb. A4.1: In ξ -Richtung ausgelenktes, gekrümmtes Saitenstückchen.

* Das Formelzeichen M wird auch für die Mensurlänge der Saite verwendet, allerdings nicht in diesem Kapitel.

Setzt man in die Trägheitsgleichung die beiden darüber stehenden Gleichungen ein, so erhält man die Differentialgleichung der reinen Biegewelle:

$$\boxed{-B \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = m' \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}} \quad \text{Differentialgleichung}$$

Anstelle der Kraft F können (auf beiden Seiten der Gleichung) auch das Moment M , der Winkel β , die Winkelgeschwindigkeit ω , die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$, die Querauslenkung ξ , die Querschnelle v oder die Querbewegung \dot{v} eingesetzt werden. Die Lösung erfolgt wieder mit dem Bernoullischen Ansatz unter der Annahme sinusförmiger Zeit- und Ortsfunktionen:

$$\boxed{\underline{F} = \hat{\underline{F}} \cdot e^{j(\omega t - kz)}} \quad \frac{\partial^4 \underline{F}}{\partial z^4} = k^4 \cdot \underline{F} \quad \frac{\partial^2 \underline{F}}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot \underline{F} \quad \text{Lösung}$$

Setzt man die beiden Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich für jedes F :

$$k^4 = m' \omega^2 / B \quad \text{charakteristische Gleichung}$$

Diese Gleichung 4. Grades hat 4 Lösungen. Die positiv reelle **Wellenzahl** k_1 beschreibt eine in positive z -Richtung fortschreitende sinusförmige Biegewelle, die negativ reelle Wellenzahl k_2 beschreibt eine in negative z -Richtung fortschreitende sinusförmige Biegewelle.

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{m'/B} \quad k_{1,2} = \pm \omega / c_P \quad \text{Wellenzahl}$$

Löst man die letzte Gleichung nach der **Phasengeschwindigkeit** c_P auf, so ergibt sich:

$$c_P = \pm \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{B/m'} \quad \text{Phasengeschwindigkeit}$$

c_P kennzeichnet die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer bestimmten Wellenphase, z.B. eines Wellenberges (Maximum). Wie man sieht, hängt c_P von der Frequenz ab. Höherfrequente Signalanteile laufen schneller als niederfrequente (**Dispersion**). Wenn allerdings nicht eine bestimmte Phase interessiert, sondern das Hüllkurvenmaximum eines polyfrequenten Signals, ist nicht die Phasengeschwindigkeit c_P maßgeblich, sondern die **Gruppengeschwindigkeit** c_G . Sie ist bei der reinen Biegewelle doppelt so groß wie die Phasengeschwindigkeit.

Die dritte und vierte Lösung der charakteristischen Gleichung sind imaginär. Es ist zweckmäßig, mit $k'_{1,2} = k_{3,4} / j$ eine reelle **Randfeldzahl** k' zu definieren. Die Indizierung lässt sich dann vereinfachen, so dass nur noch k und k' vorkommen. Bei der reinen Biegewelle gilt einfach $k = \pm k'$, bei der biegesteifen, gespannten Saite sind die Unterschiede größer (Kap. A.4.2).

$$k_{3,4} = \pm j \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{m'/B} = j \cdot k_{1,2}; \quad k = \pm \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{m'/B}; \quad k' = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{m'/B}$$

$$\underline{F} = \hat{\underline{F}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} = \text{Welle} \quad \underline{F} = \hat{\underline{F}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-k'z} = \text{Randfeld } (z \geq 0).$$

In der Praxis ist nur die Randfeldlösung mit *negativem* Exponent nutzbar, sie beschreibt (bei wachsender Distanz zum Lager) ein örtlich exponentiell abklingendes Randfeld.

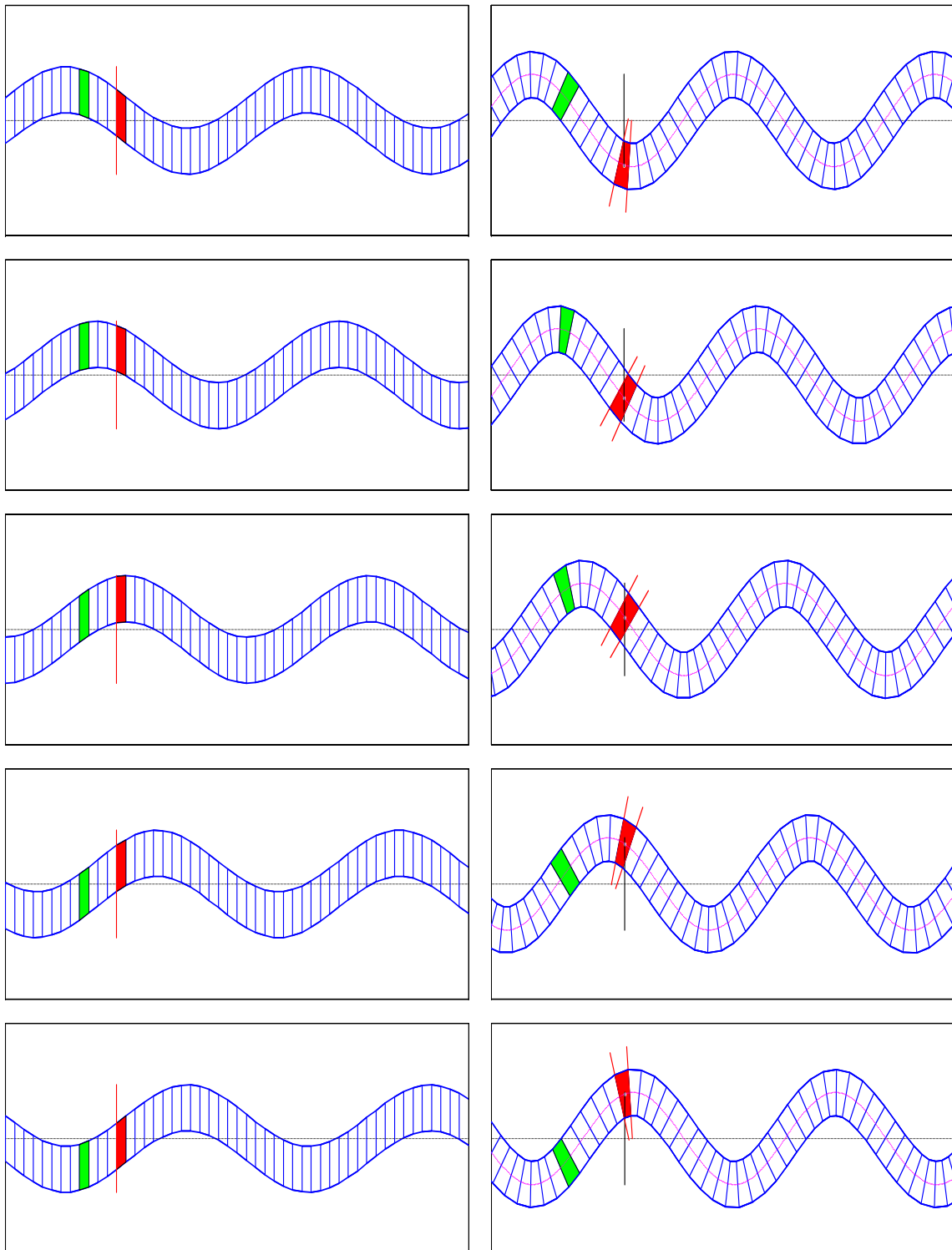


Abb. A4.2: Fortschreitende Transversalwelle (links), fortschreitende BiegeWelle (rechts). Das Phaseninkrement beträgt jeweils $\pi/4$. Die Querauslenkungen laufen von links nach rechts durch das Bild, die (in zwei Fällen dunkel gefärbten) Teilvolumina schwingen in Querrichtung um ihre Ruhelage. Bei der Transversalwelle sind die Trennlinien (Trennflächen) parallel, bei der BiegeWelle ändert sich der dazwischenliegende Winkel. Siehe auch: <http://homepages.hs-regensburg.de/~elektrogitarre> => Animationen

A.4.2 Biegesteife Saite mit Spannkraft Ψ

Der wesentliche Anteil der Saitensteifigkeit wird durch die Spannkraft erzeugt (Kap. A.3.2). Ergänzt man diese Spannsteifigkeit durch die Biegesteifigkeit (Kap. A.4.1), so erhält man bereits eine gute Näherung für die Saitenschwingung. Bei tiefen Frequenzen dominiert ganz eindeutig die Spannsteifigkeit, bei mittleren und hohen Frequenzen macht sich die zusätzliche Biegesteifigkeit bemerkbar; bei sehr hohen Frequenzen ist das Modell nicht mehr brauchbar, weil die Euler-Bernoulli-Näherung nicht mehr gilt (\rightarrow Timoshenko [11]).

Die in Kap. A.4.1 aufgestellte Steifigkeitsformel ist für die biegegesteife, gespannte Saite um die Spannsteifigkeit zu ergänzen:

$$F = -\frac{\partial M}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad \text{Querkraft}$$

Die Differentialgleichung bekommt dadurch einen zusätzlichen Term zweiter Ordnung:

$$\boxed{\Psi \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - B \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = m' \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}} \quad \text{Differentialgleichung}$$

Wie bei der Biegewelle (Kap. A.4.1) können anstelle von F auch M , β , w , \dot{w} , ξ , v oder \dot{v} eingesetzt werden. Der Bernoullische Ansatz liefert dieselbe Lösung wie bei der Biegewelle, allerdings unterscheiden sich die Wellenzahlen k von den Randfeldzahlen k' :

$$\boxed{F = \hat{F} \cdot e^{j(\omega t - kz)}} \quad \omega^2 m' = \Psi k^2 + B k^4 \quad \text{Lösung, char. Gleichung}$$

Die in k biquadratische Gleichung ergibt zwei reelle und zwei imaginäre Lösungen. Die beiden reellen Lösungen (k_1, k_2) beschreiben nach links bzw. rechts fortschreitende Wellen, die beiden imaginären Lösungen (k_3, k_4) beschreiben die (örtlich!) exponentiell an- bzw. abklingenden Randfelder (vergl. Kap. A.4.1):

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2B} \left(\sqrt{\Psi^2 + 4Bm'\omega^2} - \Psi \right)}; \quad k_{3,4} = \pm j \cdot \sqrt{\frac{1}{2B} \left(\sqrt{\Psi^2 + 4Bm'\omega^2} + \Psi \right)}$$

Lässt man B gegen null gehen (biegeweiche Saite, A.3.2), so konvergiert k gegen $\omega\sqrt{m'/\Psi}$ (Grenzwert mit l'Hospital bzw. Reihenentwicklung der Wurzel); k' geht gegen unendlich, was einem gegen null gehenden Randfeld entspricht. Lässt man andererseits Ψ gegen null gehen (Biegebalken, A.4.1), so erhält man wie bei der reinen Biegewelle:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{m'/B} \quad k_{3,4} = \pm j \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{m'/B} = j \cdot k_{1,2} \quad \text{reine Biegewelle}$$

Mit vereinfachter Indizierung ergibt sich für die **gespannte biegegesteife Saite**:

$$\boxed{k = \pm \sqrt{\frac{1}{2B} \left(\sqrt{\Psi^2 + 4Bm'\omega^2} - \Psi \right)}} \quad \boxed{k' = \sqrt{\frac{1}{2B} \left(\sqrt{\Psi^2 + 4Bm'\omega^2} + \Psi \right)}}$$

A.4.3 Biege-Eigenschwingungen

Das Anzupfen der Saite bewirkt, dass sich in beide Richtungen fortschreitende Wellen ausbreiten. Die Vielzahl der daraufhin entstehenden Reflexionen überlagern sich zu einer stehenden Welle. Da es sich bei der Saite um ein örtlich begrenztes Kontinuum handelt, empfiehlt DIN 1311 allerdings, nicht von Eigenwellen, sondern von **Eigenschwingungen** zu sprechen. Auch recht. Jeder Massepunkt der Saite kann nach dem Anzupfen eine freie Eigenschwingung mit einer Saiten-Eigenfrequenz ausführen. Die Eigenfrequenzen sind Systemgrößen, und als solche von der Anregung unabhängig. Die Schwingungsamplitude ist hingegen eine Signalgröße, deren Wert vom Anregungssignal und -ort bestimmt wird.

Jede Schwingung mit einer Eigenfrequenz ist ein monofrequenter Vorgang, dem sinusförmige Zeitfunktionen zugrunde liegen. Die DGL der Biegewelle enthält aber eine Ortsabhängigkeit vierter Ordnung, und deshalb können nichtsinusförmige Ortsfunktionen entstehen. Eigenschwingungsformen und -frequenzen ergeben sich aus vier Randbedingungen (je zwei pro Lager), Amplitude und Phase aus dem Anregungssignal.

Am Saitenlager (Steg, Sattel) sind Querkraft F und Querschnelle v durch die Translationsimpedanz Z_{FL} verknüpft. Beispielsweise beträgt die von einer Masse m hervorgerufene Translationsimpedanz $Z_{FL} = F/v = j\omega m$. Unabhängig davon weist das Lager für Drehbewegungen die Rotationsimpedanz Z_{ML} auf. Beispielsweise bewirkt ein Trägheitsmoment Θ eine Rotationsimpedanz $Z_{ML} = M/w = j\omega\Theta$, welche die Signalgrößen Moment M und Winkelgeschwindigkeit w verknüpft. Im allgemeinen Fall sind auch Kopplungen zwischen translatorischer und rotatorischer Bewegung zu erwarten.

Einfache **Randbedingungen** ergeben sich, wenn die Lagerimpedanzen zu null oder unendlich entarten. Eine unendlich Lagermasse führt dazu, dass Querauslenkung, -geschwindigkeit und -beschleunigung identisch null werden. Im Falle einer gegen null gehenden Translationsimpedanz kann zwar eine Querbewegung stattfinden, es entsteht aber keine Querkraft. Ganz analoge Beziehungen gibt es für die rotatorischen Bewegungen. Die Kombination von translatorischen und rotatorischen Randbedingungen ergibt folgende Sonderfälle:

- Freies Ende: Querkraft F und Moment M sind null.
- Geklemmtes Ende: Querschnelle v und Winkelgeschwindigkeit w sind null.
- Geführtes Ende: Winkelgeschwindigkeit w und Querkraft F sind null.
- Gestütztes Ende: Querschnelle v und Moment M sind null.

Bei genauer Analyse zeigt sich, dass das Lager seinerseits ein Kontinuum darstellt, das Eigenschwingungen ausführen kann; seine Lagerimpedanzen sind deshalb keine Konstanten, sondern frequenzabhängig. Die verschiedenen Eigenschwingungen einer speziellen Saite können deshalb unterschiedliche (d.h. frequenzabhängige) Randbedingungen antreffen.

Im Folgenden wird die Biege-Eigenschwingung einer beidseitig eingespannten Saite untersucht. Die Spannkraft wird zunächst zu null angenommen (reine Biegewelle). Die Lösung der DGL setzt sich (im Bereich $z > 0$) aus vier Bestandteilen zusammen: Einer auf das bei $z = 0$ angenommenen Lager zulaufenden Welle (jkz), einer vom Lager weglaufenden Welle ($-jkz$), einem mit wachsendem x abnehmenden Randfeld ($-k'z$), und einem mit wachsendem x zunehmenden Randfeld ($k'z$). Das letztgenannte ist für die Praxis bedeutungslos. Die anderen drei Bestandteile der speziellen Lösung gewinnen ihre komplexe Amplitude aus der Anregung und den Lagerimpedanzen.

Aus der DGL, sowie der hierzu gehörenden charakteristischen Gleichung und ihren vier Lösungen ($\pm k, \pm k'$), ergibt sich die allgemeine Lösung als Überlagerung:

$$\underline{\xi}(z, t) = \underline{\xi}_1 \cdot e^{+jkz} + \underline{\xi}_2 \cdot e^{-jkz} + \underline{\xi}_3 \cdot e^{-k'z} \quad \text{allgemeine Lösung}$$

Die orts- und zeitabhängige Querauslenkung $\underline{\xi}$ hängt von zwei Wellen und einem Randfeld ab. Die Zeitabhängigkeit ergibt sich aus den komplexen Amplituden $\underline{\xi}_i$, die Ortsabhängigkeit aus den e -Funktionen. Man kann die auf das Lager zulaufende Welle $\underline{\xi}_1$ als Anregung betrachten, von der die beiden anderen Komponenten abhängen:

$$\underline{\xi}_2 = \zeta \cdot \underline{\xi}_1 \quad \underline{\xi}_3 = \gamma \cdot \underline{\xi}_1 \quad \underline{\xi}(z, t) = \underline{\xi}_1 \cdot (e^{+jkz} + \zeta \cdot e^{-jkz} + \gamma \cdot e^{-k'z})$$

Die letzte Gleichung enthält mit ζ und γ zwei Parameter, deren Wert von den beiden Lagerimpedanzen bestimmt wird. Zu ihrer Berechnung muss die DGL der Querauslenkung auf die anderen Zustandsgrößen umgerechnet werden ($\partial / \partial t \rightarrow j\omega$, $\partial / \partial z \rightarrow jk$):

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t} = j\omega \underline{\xi}_1 \cdot (e^{+jkz} + \zeta \cdot e^{-jkz} + \gamma \cdot e^{-k'z}) \quad \text{Schnelle}$$

$$\underline{w} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} = j\omega \underline{\xi}_1 \cdot (jke^{+jkz} - jk\zeta \cdot e^{-jkz} - k'\gamma \cdot e^{-k'z}) \quad \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\underline{F} = B \frac{\partial^3 \underline{\xi}}{\partial z^3} = \underline{\xi}_1 \cdot B \cdot [jk^3 \cdot (-e^{+jkz} + \zeta \cdot e^{-jkz}) - k'^3 \gamma \cdot e^{-k'z}] \quad \text{Kraft}$$

$$\underline{M} = -B \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial z^2} = \underline{\xi}_1 \cdot B \cdot [k^2 \cdot (e^{+jkz} + \zeta \cdot e^{-jkz}) - k'^2 \gamma \cdot e^{-k'z}] \quad \text{Moment}$$

In diese vier Gleichungen können nun die Lagerbedingungen für den Ort $z = 0$ eingesetzt werden. Beispielsweise erfordert ein freies Lager: $\underline{F}(0) \equiv 0$, $\underline{M}(0) \equiv 0$. Die linke Seite der Gleichung wird hierbei zu null; sie kann durch $\underline{\xi}_1$ gekürzt werden, worauf die signalunabhängigen Systemgrößen ζ und γ bestimmbar sind. Analoges Vorgehen liefert die Reflexions- und Randfeldparameter für die anderen Sonderfälle:

Freies Ende:	$\underline{F}(0) \equiv 0$	$\underline{M}(0) \equiv 0$	$\zeta = -j$, $\gamma = +1 - j$
Geklemmtes Ende:	$\underline{v}(0) \equiv 0$	$\underline{w}(0) \equiv 0$	$\zeta = -j$, $\gamma = -1 + j$
Geführtes Ende:	$\underline{F}(0) \equiv 0$	$\underline{w}(0) \equiv 0$	$\zeta = +1$, $\gamma = 0$
Gestütztes Ende:	$\underline{v}(0) \equiv 0$	$\underline{M}(0) \equiv 0$	$\zeta = -1$, $\gamma = 0$

ζ ist hierbei der **komplexe Reflexionsfaktor**. Bei $\zeta = 1$ ist die Reflexion gleichphasig, bei $\zeta = -1$ ist sie gegenphasig, bei $-j$ um -90° phasenverschoben. γ ist ein **Randfeldfaktor**. Bei den letzten beiden Wellenabschlüssen entsteht kein Randfeld.

Das Randfeld ist bei $z = 0$ am stärksten, mit wachsenden z klingt es exponentiell ab. Als **Grenzdistanz** kann man die Entfernung vom Rand definieren, bei welcher ein Abfall auf $1/e$ erfolgt; bei der Gitarrensaite sind dies nur wenige Millimeter. Der *Betrag* des Reflexionsfaktors ζ ist für die zusammengestellten Sonderfälle immer 1; dies ist zu erwarten, weil die Reflexion dämpfungsfrei erfolgt.

Am **gestützten Ende** sind Querbewegung und Moment gleich null, Drehbewegung und Querkraft können ungleich null sein. Da kein Randfeld vorhanden ist, verläuft die Ortsfunktion sinusförmig. Die Schwingung sieht aus wie eine stehende Transversalwelle, die Eigenfrequenzen liegen aber nicht ganzzahlig vielfach zur Grundfrequenz. **Abb. A.4.3** zeigt die Auslenkung $\xi(z)$ für verschiedene Eigenfrequenzen:

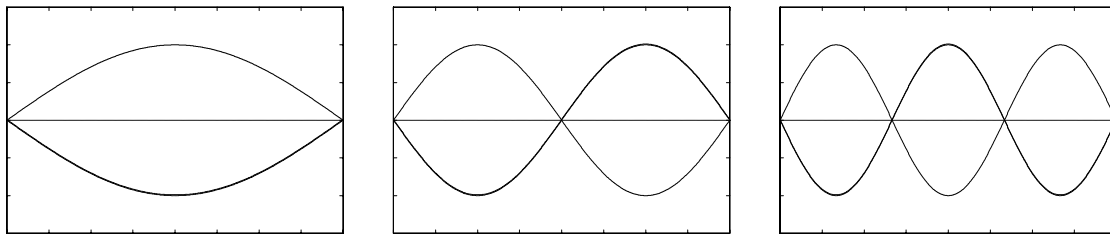


Abb. A.4.3: Stehende Biegewelle, gestützte Enden, Ordnung $n = 1, 2, 3$.

Am **geführten Ende** sind Drehbewegung und Querkraft gleich null, Querbewegung und Moment können ungleich null sein. Da kein Randfeld vorhanden ist, verläuft die Ortsfunktion sinusförmig. Die Schwingung sieht aus wie eine stehende Transversalwelle, die Eigenfrequenzen liegen aber nicht ganzzahlig vielfach zur Grundfrequenz. **Abb. A.4.4** zeigt die Auslenkung $\xi(z)$ für verschiedene Eigenfrequenzen:

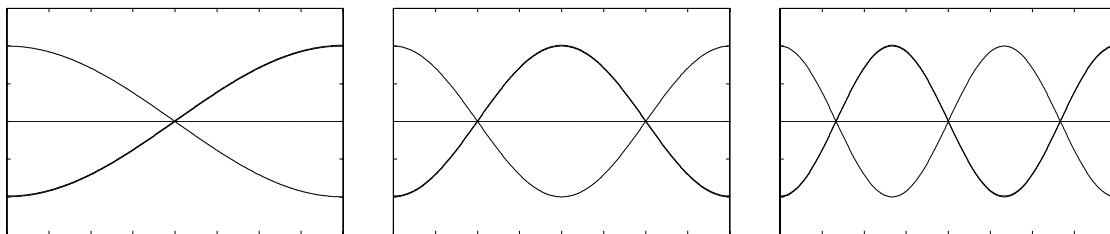


Abb. A.4.4: Stehende Biegewelle, geführte Enden, Ordnung $n = 1, 2, 3$.

Am **freien Ende** sind Moment und Querkraft gleich null, Querbewegung und Drehbewegung können ungleich null sein. Da ein Randfeld vorhanden ist, verläuft die Ortsfunktion nicht-sinusförmig. **Abb. A.4.5** zeigt die Auslenkung $\xi(z)$ für verschiedene Eigenfrequenzen:

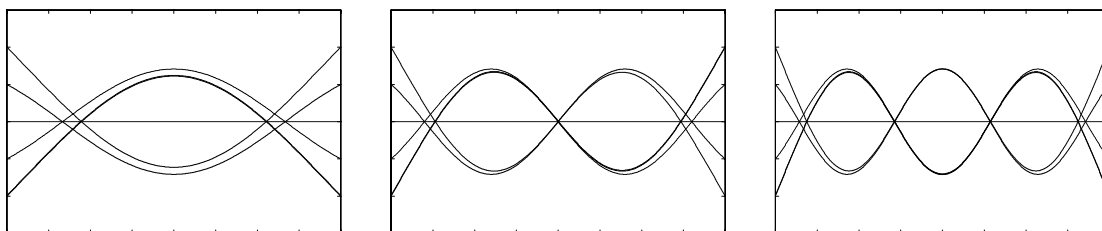


Abb. A.4.5: Stehende Biegewelle, freie Enden, Ordnung $n = 2, 3, 4$. Die dünn gezeichneten Kurven zeigen die Schwingung ohne Randfeld. Der Fall $n = 1$ kann real nicht als Eigenschwingung vorkommen.

Am **geklemmten Ende** sind Querbewegung und Drehbewegung gleich null, Moment und Querkraft können ungleich null sein. Da ein Randfeld vorhanden ist, verläuft die Ortsfunktion nichtsinusförmig. **Abb. A.4.6** zeigt $\xi(z)$ für verschiedene Eigenfrequenzen:

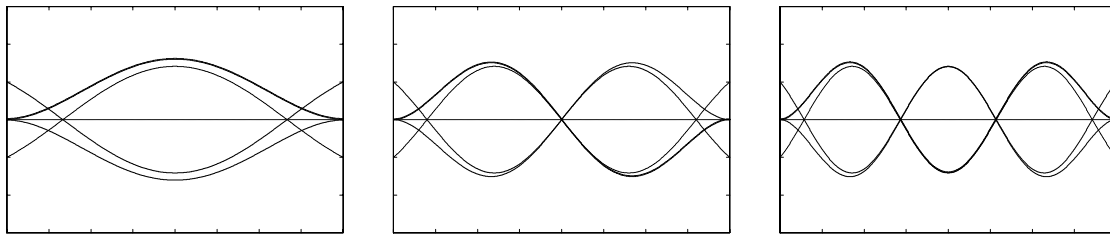


Abb. A.4.6: Stehende Biegewelle, geklemmte Enden, Ordnung $n = 1, 2, 3$. Die dünn gezeichneten Kurven zeigen die Schwingung ohne Randfeld.

Die Eigenfrequenzen der Biegeschwingung weichen aufgrund der frequenzabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit stark von denen der Transversalschwingung ab. Für den beidseitig gestützten oder beidseitig geführten Stab, der ja keine Randfelder hat, erhält man [11]:

$$f_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{m'}} \frac{n^2}{L^2} \quad \text{Eigenfrequenz } n\text{-ter Ordnung}$$

Für den beidseitig freien oder beidseitig geklemmten Stab errechnen sich die Eigenfrequenzen näherungsweise (bei nur einseitiger Berücksichtigung jedes Randfeldes [11]) zu:

$$f_n \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{m'}} \frac{(n-0,5)^2}{L^2} \quad \text{Eigenfrequenz } n\text{-ter Ordnung}$$

Die Biegesteifigkeit ist bei Gitarrensaiten vor allem bei großen Durchmessern und im höheren Frequenzbereich zu berücksichtigen, und da auch nur in geringem Umfang. Der überwiegende Teil der Steifigkeit wird durch die Spannkraft erzeugt, die Abb. A.4.5 und A.4.6 zeigen den Einfluss der Randfelder tendenziell richtig, aber für Gitarrensaiten stark übertrieben. Formal wird der Unterschied zwischen der reinen Biegewelle und der **biegesteifen Saite** bei der Kraft berücksichtigt:

$$\underline{F} = B \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \quad \text{Balken} \qquad \underline{F} = B \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} - \Psi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad \text{Saite}$$

Wenn allerdings die Lagerbedingungen nicht so ideal sind wie in den oben erwähnten Sonderfällen, können auch im tieffrequenten Bereich Unterschiede zur biegeweichen Saite auftreten (Sperrmasse, Totdurchgang, Kap. 2.5.2).

A.5 Wellenwiderstände

Der **Wellenwiderstand** Z_W verbindet bei der fortschreitenden Transversalwelle die Querkraft F mit der Querschnelle v . Bei der **idealisierten** (biegesteifefreien) Saite hängt Z_W von der längenspezifischen Masse m' und der längenspezifischen Nachgiebigkeit n' ab:

$$Z_W = F / v = \sqrt{m' / n'} = \sqrt{\Psi \cdot \rho \cdot D^2 \pi / 4} = \frac{\pi}{2} \rho \cdot M \cdot f_G \cdot D^2 = \Psi / c = m' \cdot c \quad \text{Wellenwiderstand}$$

Hierbei bedeuten: Ψ = Spannkraft, ρ = Dichte, D = Durchmesser, M = Mensur*, f_G = Grundfrequenz, c = Phasengeschwindigkeit. Übliche Z_W -Werte liegen bei Massivsaiten zwischen 0.1 und 0.4 Ns/m. Bei umsponnenen Saiten kann für tiefe Frequenzen die Biegesteifigkeit ignoriert werden und lediglich ρ durch $\bar{\rho}$ ersetzt werden; die hierzu gehörenden Wellenwiderstände liegen dann im Bereich zwischen 0.3 und 1.2 Ns/m.

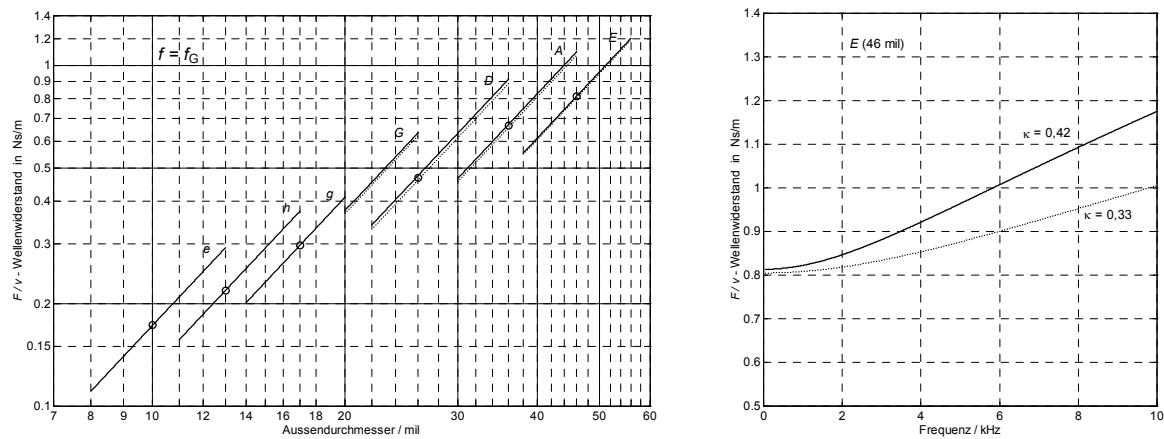


Abb. A.5.1: Wellenwiderstand für unterschiedliche Außendurchmesser. Die gestrichelten Kurven gehören zu Saiten mit relativ dünnem Kern. Bei der E₂-Saite (rechtes Bild) ist im oberen Frequenzbereich der Einfluss der Biegesteifigkeit erkennbar. Mit abnehmendem Saitendurchmesser verliert die Biegesteifigkeit an Bedeutung, aus der Biegewelle wird eine Transversalwelle.

Bei Berücksichtigung der **Biegesteifigkeit** stößt man auf kompliziertere Zusammenhänge. Die Wellengleichung enthält nun neben der zweiten örtlichen Ableitung auch eine vierte örtliche Ableitung. Als Konsequenz hiervon ergeben sich nicht nur (in beide Richtungen) fortschreitende Wellen, sondern (im Nahbereich der Lager) auch exponentiell abnehmende Randfelder. Die fortschreitenden Wellen muss man in Biegewellen und Biegemomentwellen unterteilen, und deshalb ist es erforderlich, neben einem F/v -Wellenwiderstand einen M/w -Widerstand zu definieren, der in entsprechender Weise das Biegemoment mit der Winkelgeschwindigkeit verbindet. Beide Widerstände sind zwar reell, aber frequenzabhängig. Im Fall einer Saite, deren Querabmessungen klein gegenüber der Biegewellenlänge sind ("dünner Stab"), kann vereinfacht werden: Außerhalb der Randfelder, die sich nur über wenige Millimeter erstrecken, reicht zur Beschreibung *ein* Wellentyp. Die vier Wellengrößen sind: F , v , M , w (Kap. A.4.1, A.4.2); bei Kenntnis zweier Größen lassen sich die anderen beiden errechnen. In **Abb. A.5.1** ist der F/v -Wellenwiderstand für die Saitengrundfrequenzen dargestellt. Das Verhältnis Kern-/Außendurchmesser (κ) hat für $f = f_G$ wenig Einfluss, bei dicken Saiten und hohen Frequenzen muss die Biegesteifigkeit aber berücksichtigt werden.

* Im Kapitel A.5 steht M für ein mechanisches Moment, und M für die Saiten-Mensurlänge.

Mit Berücksichtigung der Biegesteifigkeit berechnet sich der F/v -Wellenwiderstand zu:

$$Z_{WF} = \frac{F}{v} = \frac{\Psi + B \cdot k^2}{\omega/k} = \frac{\Psi + B \cdot k^2}{c}; \quad k = \pm \sqrt{\frac{1}{2B} \left(\sqrt{\Psi^2 + 4Bm'\omega^2} - \Psi \right)}$$

Das Vorzeichen des Wellenwiderstandes hängt von der Ausbreitungsrichtung der Welle ab: Für nach rechts laufende Wellen (zunehmendes z) ist Z_{WF} positiv, für nach links laufende negativ. Die Biegesteifigkeit verändert den F/v -Wellenwiderstand auf zweierlei Weise: Zum ersten Term Ψ/c kommt der Summand Bk^2/c hinzu, aber auch der erste Term wird verändert, weil die Phasengeschwindigkeit ($c = \omega/k$) mit zunehmender Frequenz zunimmt. Für eine E_2 -Saite zeigt **Abb. A.5.2** den Einfluss der Biegesteifigkeit auf den F/v -Wellenwiderstand. Im Bereich tiefer Frequenzen kann Bk^2 gegenüber Ψ vernachlässigt werden, der Wellenwiderstand hängt dann näherungsweise nur mehr von Ψ/c ab (Umrechnungen siehe weiter oben). Bei höheren Frequenzen ist der Einfluss der Biegesteifigkeit bei den Diskant-Seiten gering (G-Saite in **Abb. A.5.2**), bei den Bass-Saiten deutlich (E_2 -Saite in **Abb. A.5.2**), insbesondere bei relativ dickem Kern (d.h. großem κ).

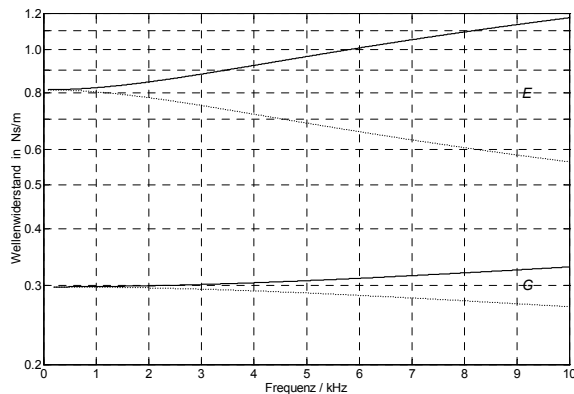


Abb. A.5.2: Einfluss der Biegesteifigkeit auf den F/v -Wellenwiderstand. E_2 -Saite (46 mil, $\kappa = 0,42$), G-Saite (17 mil, plain). Die durchgezogene Linie gehört zum Gesamtwiderstand, die gestrichelte Linie zum ersten Term ($\Psi k/\omega = \Psi/c$).

Mit Berücksichtigung der Biegesteifigkeit B liegt eine Differentialgleichung *vierter* Ordnung vor: Unabhängig von Querkraft und Saiten-Querauslenkung kann auch mit einem Moment oder einer Drehbewegung angeregt werden, und das Saitenende kann (zumindest theoretisch) frei, aufgestützt, eingespannt oder geführt sein. Die idealisierten Randbedingungen für Kraft F , Schnelle v , Winkelgeschwindigkeit w bzw. Moment M bedeuten:

Frei: $F = 0, M = 0$; gestützt: $v = 0, M = 0$; eingespannt: $v = 0, w = 0$; geführt: $F = 0, w = 0$.

Das freie Saitenende wird man sofort in Frage stellen: Es kann keine Spannkraft aufbringen – und eine geführten Halterung wird selbst in der theoretischen Literatur nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Hierbei darf aber nicht übersehen werden, dass diese Lagerbedingungen (Lagerimpedanzen) frequenzabhängig sind. Bei $f = 0$ Hz ist eine Spannkraft unerlässlich, bei $f \neq 0$ können sich aber ganz andere Bedingungen einstellen, wie folgendes Beispiel zeigt: Als Saitenlager wird eine federnd gelagerte Masse definiert; die Lagerimpedanz ergibt sich hiermit zu: $Z = j\omega m + s/j\omega = (s - \omega^2 m)/j\omega$. Für $f = 0$ wirkt dieses Lager wie eine Feder und kann statische Spannkraft aufnehmen, bei Resonanz ist die Impedanz aber null – und das bedeutet: keine Kraft, trotz Bewegung.

Neben dem F/v -Wellenwiderstand ist bei der biegesteifen Saite noch der M/w -Wellenwiderstand zu berücksichtigen, der das Moment M mit der Winkelgeschwindigkeit w verbindet. Diese Winkelgeschwindigkeit ist nicht die Kreisfrequenz ω , mit der die Saite schwingt, sondern die anschlagabhängige Drehgeschwindigkeit der einzelnen Saitenteilchen (Abb. A.4.1).

$$Z_{WM} = \frac{M}{w} = \frac{B \cdot k}{\omega} = \frac{B}{c} \quad M/w\text{-Wellenwiderstand}$$

Im Bereich tiefer Frequenzen lässt sich die **Phasengeschwindigkeit** c in guter Näherung aus der Saitengrundfrequenz f_G und der doppelten Mensurlänge M berechnen: $c = 2M \cdot f_G$. Da die Biegesteifigkeit von der vierten Potenz des Saitendurchmessers abhängt, wächst auch Z_{WM} mit der vierten Potenz des Saitendurchmessers (**Abb. A.5.3**). Mit zunehmender Frequenz darf c aber nicht mehr als Konstante angenommen werden; vielmehr ist – insbesondere bei den tiefen Saiten – eine Zunahme über f zu berücksichtigen (**Abb. A.5.4**):

$$c = \omega \cdot \sqrt{\frac{2B}{\Psi^2 + 4Bm'\omega^2 - \Psi}} \quad \text{Phasengeschwindigkeit}$$

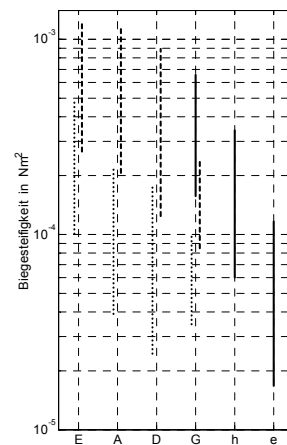
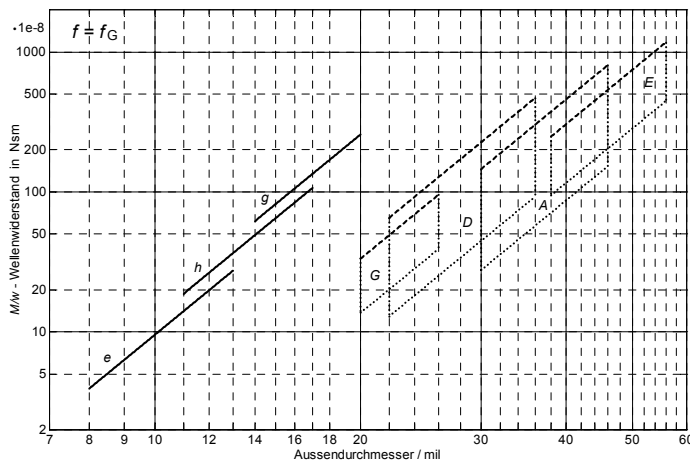


Abb. A.5.3: M/w -Wellenwiderstand (linkes Bild), Biegesteifigkeit (rechtes Bild). Massivsaiten (—), umspinnene Saiten mit dickem Kern (-----), umspinnene Saiten mit dünnem Kern (.....).

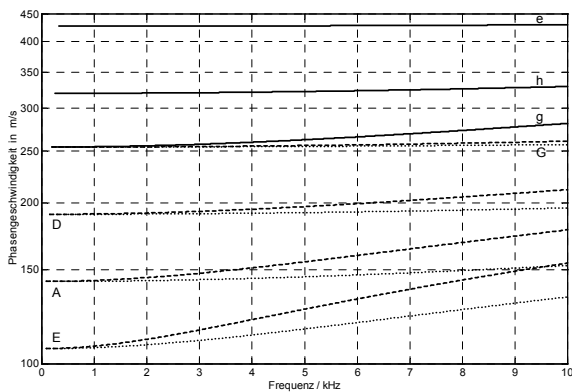


Abb. A.5.4: Phasengeschwindigkeit der Biegewelle: Massivsaiten (—), umspinnene Saiten mit dickem Kern (-----), umspinnene Saiten mit dünnem Kern (.....).

Für **Dehnwellen** berechnet sich der Wellenwiderstand Z_W ebenfalls aus dem Produkt von längenspezifischer Masse m' und Phasengeschwindigkeit c , wobei aber jetzt die Phasengeschwindigkeit der Dehnwelle anzusetzen ist:

$$Z_W = \frac{F}{v} = m' \cdot c = S \cdot \sqrt{E \cdot \rho} \quad \text{Wellenwiderstand (Dehnwelle)}$$

Hierbei steht S für die Querschnittsfläche, E für den Elastizitätsmodul, und ρ für die Dichte. Da keine Dispersion auftritt, ist der Wellenwiderstand frequenzunabhängig.

Für umspinnene Saiten ist wieder das Verhältnis Kerndurchmesser / Außendurchmesser zu berücksichtigen: $\kappa = D_K / D_A$. Die Umspinnung vergrößert die Masse, ohne die Längssteifigkeit erheblich zu erhöhen (Näherung). Der Wellenwiderstand ergibt sich zu:

$$Z_W = S_A \cdot \kappa \cdot \sqrt{E \cdot \bar{\rho}}; \quad \bar{\rho} \approx 0,9 \cdot \rho \quad \text{Dehnwellenwiderstand bei umspinnenen Saiten}$$

Der Dehnwellenwiderstand ist ungefähr zwanzigmal so groß wie der Querwellenwiderstand.

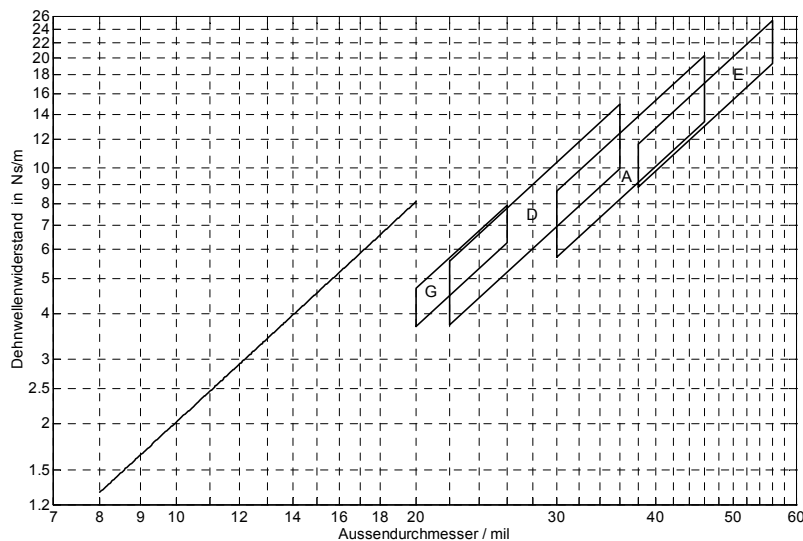


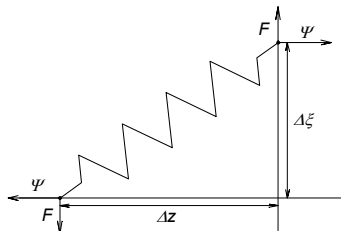
Abb. A.5.5: Wellenwiderstände für Dehnwellenausbreitung.

A.6 Steifigkeiten

Die biegesteife Saite wird durch die spannkraftabhängige Quersteifigkeit s_Q und die Biege-
steifigkeit B beschrieben. Bei statischer Auslenkung in Querrichtung wirkt die Saite näher-
ungsweise wie eine Feder mit der Federsteifigkeit s_Q , hingegen gilt für Transversalwellen-
ausbreitung (ohne Dispersion) die längenbezogene Nachgiebigkeit n' :

$$s_Q = \frac{F}{\xi} = \frac{\Psi \cdot M}{R \cdot L} \qquad n' = \frac{\Delta \xi / F}{\Delta z} = \frac{1}{\Psi} \qquad \text{Transversalbelastung}$$

Hierbei bedeuten: F = Querkraft, ξ = Querauslenkung, Ψ = Spannkraft, M = Mensurlänge,
 R = Abstand zwischen Kraftangriff und Steg, L = Abstand zwischen Kraftangriff und Sattel.
Abb. A.6.1 bietet eine Alternative zu dem in Abb. 2.5 vorgestellten Saitenmodell – mit dem
Vorteil, auch eine in z -Richtung verlaufende Spannkraft verarbeiten zu können, aber mit
leichten Defiziten bei den Vorzeichen. Sowohl s_Q als auch n' ergeben sich als Funktion der
Spannkraft – sie sind vom Elastizitätsmodul E unabhängig!



$$\frac{\Delta \xi}{\Delta z} = \frac{F}{\Psi}; \qquad \Delta n = \frac{\Delta \xi}{F} = \frac{\Delta z}{\Psi}; \qquad n' = \frac{\Delta n}{\Delta z} = \frac{1}{\Psi}.$$

Abb. A.6.1: Kräftezerlegung am Saitenmodell. Die längen-
spezifische Nachgiebigkeit n' ist reziprok zur Spannkraft Ψ .

In **Abb. A.6.2** sind typische Saiten-Quersteifigkeiten dargestellt (vergl. mit Abb. A.1.2).

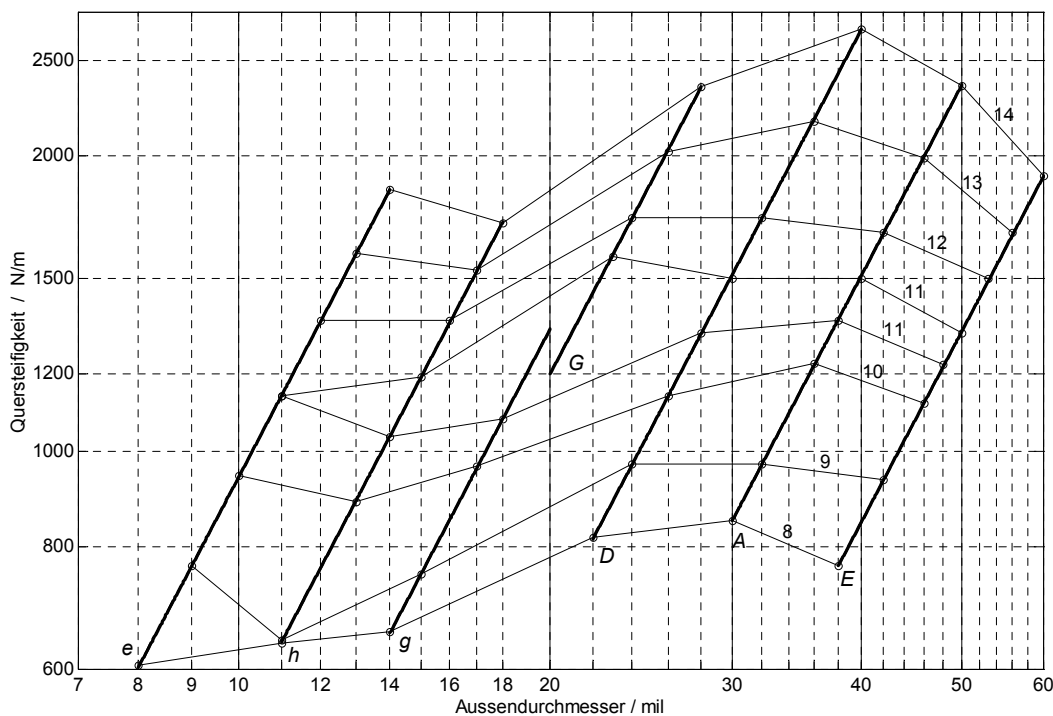


Abb. A.6.2: Quersteifigkeit; Mensur $M = 64,8$ cm, der Anzupfpunkt ist 9 cm vom Steg entfernt.

Während für statische Belastung ($f = 0$) die Biegesteifigkeit vernachlässigt werden darf, ist sie bei dickeren Saiten und hohen Frequenzen zu berücksichtigen. Mit zunehmendem Saitendurchmesser wächst B proportional zu D^4 , was bei Massivsaiten hörbare Auswirkungen hätte (Kap. 1.2.1). Zur Verringerung der Biegesteifigkeit sind dicke Saiten nicht massiv, sondern umsponnen; B wird dann praktisch nur mehr vom Kern bestimmt.

$$B = E \cdot I = E \cdot D^4 \pi / 64$$

Biegesteifigkeit

I = Flächenträgheitsmoment, E = Elastizitätsmodul, D = Saitendurchmesser (Massivsaiten) bzw. Kerndurchmesser (umspinnene Saiten). Die **Biegesteifigkeit** $B = E \cdot I$ kann man sich als längenspezifische Drehsteifigkeit vorstellen, ähnlich wie man beim einachsigen Verzerrungszustand das Produkt aus Elastizitätsmodul E und Querschnittsfläche S als längenspezifische Federsteifigkeit s' interpretieren kann. Für die Analogie zweckmäßiger ist allerdings der Kehrwert, die Nachgiebigkeit n :

$$n = \frac{\Delta z}{E \cdot S} \Rightarrow n' = \frac{n}{\Delta z} = \frac{1}{E \cdot S} \quad n_D = \frac{\Delta z}{E \cdot I} \Rightarrow n'_D = \frac{n_D}{\Delta z} = \frac{1}{E \cdot I}$$

einachsiger Verzerrungszustand Biegebelastung*

Die längenspezifische Nachgiebigkeit n' ist Nachgiebigkeit n pro Länge Δz . Beim Kehrwert der Nachgiebigkeit, der Steifigkeit s , ist der Längenbezug zunächst ungewohnt: $s = 1/n$, und $s' = 1/n' = s \cdot \Delta z$. Um von der Steifigkeit zur längenspezifischen Steifigkeit zu gelangen, muss mit der Länge Δz multipliziert werden! Ungewohnt, aber unabänderlich, denn mit gegen null gehender Länge geht die Nachgiebigkeit gegen null, die Steifigkeit jedoch gegen unendlich.

In **Abb. A.6.3** ist die Biegesteifigkeit für übliche Gitarrensaiten dargestellt. Als Elastizitätsmodul wurde $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ angenommen, bei den umspinnenen Saiten ist nur die Biegesteifigkeit des Kerns berücksichtigt.

- E4: $D_A = 8 \dots 13 \text{ mil}$, massiv.
- H3: $D_A = 11 \dots 17 \text{ mil}$, massiv.
- G3: $D_A = 14 \dots 20 \text{ mil}$, massiv.
- G3: $D_A = 20 \dots 26 \text{ mil}$, $\kappa = 0,48$ und $0,60$.
- D3: $D_A = 22 \dots 36 \text{ mil}$, $\kappa = 0,40$ und $0,60$.
- A2: $D_A = 30 \dots 46 \text{ mil}$, $\kappa = 0,33$ und $0,50$.
- E2: $D_A = 38 \dots 52 \text{ mil}$, $\kappa = 0,33$ und $0,42$.

D_A = Außendurchmesser, κ = Kern-/Außendurchmesser.

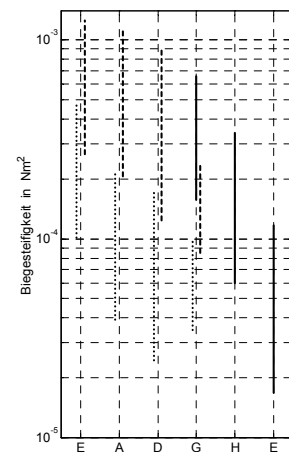


Abb. A.6.3: Biegesteifigkeit

Die Biegesteifigkeit B verbindet die örtliche Änderung der Saitenrichtung, d.h. $d\beta/dz$, mit dem Biegemoment M (Abb. A.4.1). Das Minuszeichen entspricht einer Vorzeichenkonvention.

$$-M = B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = B \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

* Die Drehnachgiebigkeit n_D wird auch rotatorische Nachgiebigkeit genannt.

A.7 Impulse

Die Mechanik definiert den Impuls p als Produkt von Masse und Geschwindigkeit: $p = m \cdot v$. Diese Definition kommt im vorliegenden Buch nicht zur Anwendung – stattdessen wird die Definition der **Systemtheorie** verwendet: Ein Impuls ist ein im Wesentlichen kurzdauerndes Signal, das entweder während kurzer Zeit von null verschieden, und während der restlichen Zeit null ist, oder das so schnell gegen null konvergiert, dass das Signal im überwiegenden Bereich des Beobachtungszeitraums praktisch null ist. Die Begriffe "im Wesentlichen", "überwiegend" und "praktisch" können nur im Einzelfall konkretisiert werden. Der Wert **kausaler** Signale ist für negative Zeiten identisch null, **akausale** Signale sind auch bei negativen Zeiten von null verschieden.

Das Formelzeichen p , in der Mechanik für den Impuls (bzw. Kraftstoß) benutzt, steht in der Systemtheorie für die komplexe **Kreisfrequenz**: $p = \sigma + j \cdot \omega = \sigma + j \cdot 2\pi f$; $j = \sqrt{-1}$.

Der Wert eines **bipolaren Impulses** wechselt seine Polarität (sein Vorzeichen) mindestens einmal, während ein **unipolarer Impuls** die Nulllinie nicht schneidet. DIN 1311 spricht anstelle des Impulses vom Stoß.

Der **Dirac-Impuls** $\delta(t)$ ist ein theoretisches Signal, das zwar in der Praxis nicht vorkommen kann, trotzdem aber als Standardsignal zur (theoretischen) Systemanregung verwendet wird. $\delta(t)$ ist immer null, außer bei $t = 0$; hier ist $\delta(t)$ unendlich [Marko, Küpfmüller]. Wenn ohne nähere Konkretisierung nur vom "Impuls" gesprochen wird, ist entweder ein Dirac-Impuls gemeint, oder – zumeist bei Messungen – eine unipolare Näherung hierfür.

Ein Signal, in dem kurzdauernde Impulse in periodischer Wiederholung auftreten, wird **Puls** genannt (z.B. Rechteckpuls, Diracpuls).

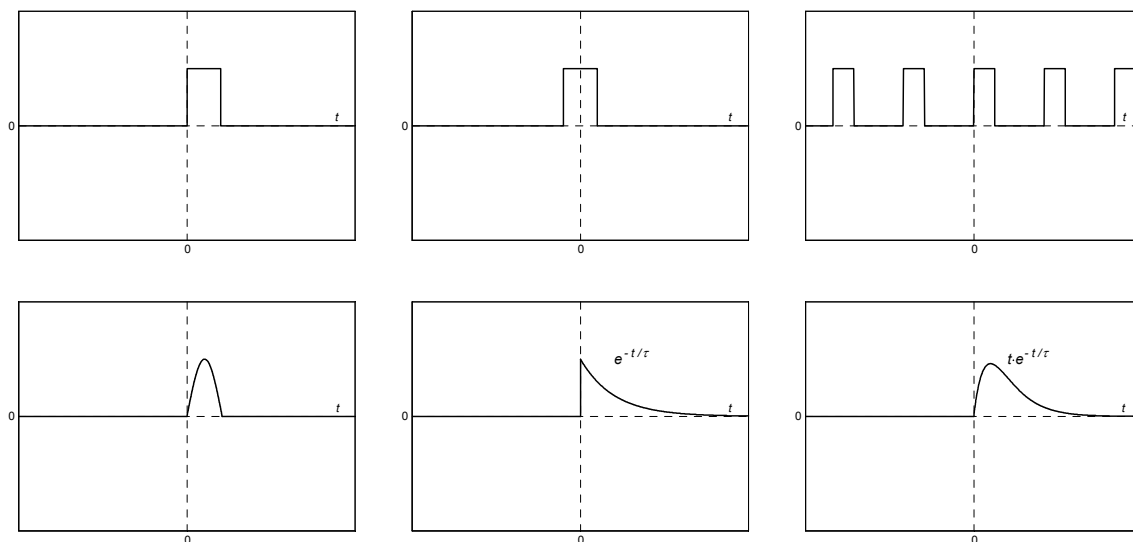


Abb. A.7.1: Impulsformen: Kausaler Rechteckimpuls, akausaler Rechteckimpuls, Rechteckpuls; (oben, v.l.n.r.). Kausaler Sinus-Halbwellenimpuls, kausale Exponentialimpulse; (unten, v.l.n.r.).