

Modellierung analoger Gitarrenverstärker mit digitaler Signalverarbeitung

Von der Fakultät für Elektrotechnik
der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Kristjan Dempwolf

aus Osterode am Harz

Hamburg 2012

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Udo Zölzer
(Helmut-Schmidt-Universität,
Universität der Bundeswehr Hamburg)

Prof. Dr.-Ing. Alexander Potchinkov
(Technische Universität Kaiserslautern)

Tag der mündlichen Prüfung: 02.11.2012

Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Allgemeine Nachrichtentechnik an der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg entstanden.

Meinem Betreuer Professor Udo Zölzer danke ich für die Unterstützung, die vielen Anregungen während meines Forschungsvorhabens und die Möglichkeit, diese Arbeit durchführen zu können. Mein Dank gilt weiterhin dem Zweitgutachter, Professor Alexander Potchinkov, der diese Arbeit durch wertvolle Hinweise ebenfalls positiv beeinflusst hat.

Allen Kolleginnen und Kollegen der Professur danke ich für die gute Zusammenarbeit, fachliche Ratschläge und Diskussionen, aber auch für die angenehme und kreative Arbeitsatmosphäre. Dank gilt auch den zahlreichen Studenten, deren Mitwirken direkt oder indirekt zum Erfolg meines Vorhabens beigetragen hat. Professor Göbel danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Mein besonderer Dank gilt meiner Freundin Julia, meinen Eltern und meinen Freunden für das aufgebrachte Verständnis während meines Promotionsvorhabens und das bereitwillige Korrekturlesen.

Hamburg, im Dezember 2012

Kristjan Dempwolf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Ansätze zur Analyse	5
2.2	Der Systembegriff	5
2.2.1	Eigenschaften von Systemen	6
2.2.2	Systemklassifikation analoger Schaltungen	6
2.3	Grundlagen der Netzwerkanalyse	7
2.3.1	Grundbegriffe	7
2.3.2	Knotenpotentialverfahren	8
2.3.3	Maschenstromverfahren	10
2.3.4	Modifiziertes Knotenpotentialverfahren	11
2.3.5	Erweiterung auf RLC-Netzwerke	12
2.4	Berechnung zeitabhängiger Vorgänge	13
2.4.1	Beschreibung im Zeitbereich	13
2.4.2	Beschreibung im Frequenzbereich	16
2.5	Berechnung nichtlinearer Schaltungen	18
3	Modellierung von Gitarrenverstärkern	19
3.1	Aufbau eines Gitarrenverstärkers	19
3.2	Allgemeine Herangehensweise	21
3.2.1	Gliederung in Teilsysteme	22
3.2.2	Wahl geeigneter Simulationsansätze	23
3.2.3	Nutzung von Vereinfachungen	24
3.3	Abstrakte Ansätze zur digitalen Simulation	24
3.3.1	Generierung von Verzerrungen	24
3.3.2	Statische Waveshaper	25
3.4	Analytische Ansätze zur digitalen Simulation	26
3.4.1	Digitale Filter	26
3.4.2	Wellendigitalfilter	27
3.4.3	Zustandsbasierte Techniken	28

4	Lineare Systeme im Zustandsraum	29
4.1	Zeitkontinuierliche Beschreibung	29
4.1.1	Eigenschaften des Zustandsraums	31
4.1.2	Übertragungsmatrix	32
4.2	Zeitdiskrete Beschreibung	33
4.3	Diskretisierungsmethoden	33
4.3.1	Explizites Euler-Verfahren	34
4.3.2	Implizites Euler-Verfahren	36
4.3.3	Trapezregel	37
4.3.4	Weitere Diskretisierungsmethoden	38
4.4	Elektronische Netzwerke im Zustandsraum	38
4.5	Betrachtung parametrischer und zeitvarianter Systeme	39
4.6	Beispiel: Klangregelung	40
4.6.1	Schaltungsanalyse	41
4.6.2	Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell	42
4.6.3	Eigenschaften des Systems	43
4.6.4	Zeitdiskretes Zustandsraummodell	44
4.6.5	Ergebnisse	44
4.7	Gegenüberstellung der Diskretisierungsmethoden	45
4.8	Zusammenfassung des Kapitels	46
5	Nichtlineare Systeme im Zustandsraum	47
5.1	Zeitkontinuierliche Beschreibung	47
5.2	Zeitdiskrete Beschreibung	48
5.3	Berechnung der nichtlinearen Strom-Spannungs-Beziehung	50
5.4	Berechnung der linearen Strom-Spannungs-Beziehung	50
5.4.1	Vorberechnung und Tabellierung	50
5.4.2	Lösen der Gleichung zur Laufzeit	52
5.4.3	Gegenüberstellung der Realisierungen	55
5.5	Beispiel: Diodenbegrenztes RC-Filter	56
5.5.1	Schaltungsanalyse und zeitkontinuierliches Zustandsraummodell	57
5.5.2	Definition der Nichtlinearität	58
5.5.3	Lösen der nichtlinearen Gleichung	59
5.5.4	Ergebnisse	60
5.6	Alternativer Ansatz: DK Methode	60
5.6.1	Diskretisierung	61
5.6.2	Schaltungsanalyse	61
5.6.3	Zustandsaktualisierung	62

5.6.4	Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung	63
5.6.5	Diskussion der DK-Methode	63
5.6.6	Beispiel: Diodenbegrenztes RC-Filter	64
5.7	Zusammenfassung des Kapitels	65
6	Elektronenröhren	67
6.1	Bedeutung der Röhrentechnik im digitalen Zeitalter	67
6.1.1	Klangunterschiede zum Transistorverstärker	67
6.2	Physikalische Grundlagen	69
6.2.1	Röhrendiode	69
6.2.2	Trioden	70
6.3	Reale, nicht-ideale Trioden	74
6.3.1	Abweichungen im Raumladungsbereich	74
6.3.2	Sekundärelektronen	75
6.3.3	Datenblattangaben	75
6.4	Messungen an Trioden	76
6.5	Diskussion der Messergebnisse	78
6.6	Modellierung von Trioden	79
6.6.1	Ansatz nach Leach	80
6.6.2	Ansatz nach Koren	81
6.6.3	Ansatz nach Cohen und Hélie	81
6.6.4	Ansatz nach Cardarilli et al.	82
6.7	Ein Beitrag zur Modellierung von Trioden bei positivem Gitter	83
6.7.1	Vorüberlegung zum Raumladungsstrom	83
6.7.2	Vorüberlegung zum Gitterstrom	83
6.7.3	Glatte Übergänge	84
6.7.4	Modellgleichungen	85
6.8	Alternativer Ansatz	87
6.8.1	Gitterstrom	87
6.8.2	Vereinfachte Modellgleichungen	87
6.8.3	Limitierungen	88
6.9	Fitten der Parameter	89
6.10	Vergleich der Modelle	90
6.11	Zusammenfassung des Kapitels	94
7	Beurteilungskriterien für die Qualität einer Simulation	95
7.1	Analyse gewöhnlicher linearer Systeme	96
7.1.1	Frequenzgang	96
7.1.2	Klirrfaktor und nichtlineare Verzerrungen	96

7.2	Analyse nichtlinearer Systeme	97
7.2.1	Transientenanalyse	97
7.2.2	Frequenzabhängigkeit der Verzerrungen	99
7.3	Weitere Kriterien	103
7.3.1	Aliasing	103
7.3.2	Artefakte und Performanz	104
7.4	Ursachen für Abweichungen zur Referenzschaltung	105
7.5	Höreindruck	105
7.6	Zusammenfassung des Kapitels	107
8	Anwendungen	109
8.1	Verzerrung durch Halbleiter	109
8.1.1	Beispiel: JCM900 Vorstufe	109
8.1.2	Beispiel: Fuzz-Face	117
8.2	Verzerrung durch Röhren	122
8.2.1	Beispiel: Kathodenbasisschaltung	122
8.2.2	Beispiel: Kathodenbasisschaltung, vereinfacht	129
8.2.3	Beispiel: Zweistufiger Vorverstärker	130
8.2.4	Beispiel: Leistungsverstärker	134
8.3	Weitere nichtlineare Schaltungen	141
8.4	Implementierungen	142
8.4.1	DSP-Umsetzung	143
8.4.2	VST-Umsetzung	143
8.5	Zusammenfassung des Kapitels	144
9	Zusammenfassung	147
	Anhang	151
A	SPICE Modelle	153
B	Ermittelte Röhrenparameter	155
	Literaturverzeichnis	159
	Lebenslauf	167

1 Einleitung

Die Elektrogitarre ist eines der beliebtesten Musikinstrumente seit den 1950er Jahren. Ihr Klang hat unser Verständnis der Jazz-, Pop- und Rockmusik entscheidend geprägt. Dieser wird, neben dem Beitrag des Saiteninstrumentes selbst, stark durch den Gebrauch spezieller Instrumentenverstärker und Zusatzgeräte beeinflusst. Es ist durchaus angebracht, die Kombination aus Elektrogitarre und Verstärker als eine Einheit aufzufassen. Zusammen bilden diese Geräte, im weiteren Sinne, das Instrument.

Natürlich hat der Gitarrenverstärker in erster Linie die Aufgabe, das elektrische Signal der Elektrogitarre so weit zu verstärken, dass es über Lautsprecherboxen in einer ausreichenden Lautstärke wiedergegeben werden kann. Darüber hinaus ist er jedoch maßgeblich für den vertrauten „E-Gitarren-Sound“ verantwortlich ¹. Sowohl die Klangfärbung als auch die harmonischen Verzerrungen machen einen Gitarrenverstärker aus, das linear verstärkte Originalsignal ist kaum interessant. Dieser von den Gitarristen geschätzte Klang, die warme Verzerrung und das dynamische Spielgefühl, beruhen hauptsächlich auf der Übersteuerung von Röhrenschaltungen. Verschiedene Fabrikate oder Verstärkermodelle führen zu unterschiedlichem Sound, wobei einigen Geräten ein hoher Wiedererkennungswert beizumessen ist. Auch viele aktuelle Verstärkerdesigns orientieren sich nicht ohne Grund am Aufbau erfolgreicher Geräte aus den 1950er und 1960er Jahren.

Die klanglichen Qualitäten eines übersteuerten Röhrenverstärkers sind ohne Zweifel überragend. Leider sind auch Nachteile aufzulisten, welche die Freude an einem solchen Gerät trüben. Röhrenverstärker sind teuer, sperrig und schwer. Darüber hinaus ist die klangliche Bandbreite oft gering. Den erwähnten Wiedererkennungswert mancher Geräte kann man auch so formulieren: Viele Verstärker liefern oft nur *einen* „guten“ Klang, der sich nur

¹ Es soll an dieser Stelle nicht der Eindruck vermittelt werden, die Wahl des richtigen Equipments könne fehlende Musikalität, Talent oder mangelnde Übung ersetzen. Die Grundlage eines guten Tons sind die Fertigkeiten des Musikers, Gitarre und Verstärker dienen ihm lediglich als Werkzeuge.

wenig variieren lässt. Wird eine höhere Vielfalt benötigt, bedarf es weiterer Zusatzgeräte. Da die Lautsprecherbox einen wichtigen Beitrag zum Klang liefert, ist im Tonstudio oder bei Live-Darbietungen eine umständliche Mikrofonabnahme notwendig.

Die digitale Revolution

Im Jahr 1996 brachte die kalifornische Firma LINE6 ein Gerät auf den Markt, das für Aufsehen unter den Gitarristen sorgte - und in den folgenden Jahren die eher altmodische Welt der Musiker polarisierte. Der unscheinbare Gitarrenverstärker mit der Bezeichnung „AxSys 212“ war in der Lage, den Klang vieler bekannter „Kultverstärker“ nachzuahmen. Per Knopfdruck konnten nun die unterschiedlichsten Sounds abgerufen, verändert und gespeichert werden. Die Klangerzeugung erfolgte nicht in der gewohnten analogen Schaltungstechnik, sondern basierte auf Algorithmen der digitalen Signalverarbeitung. Der Klang wurde einzig mit dem integrierten Signalprozessor (DSP) erzeugt. Die Verstärkerhardware selbst war ansonsten unspektakulär. Diese neue Technologie erhielt den Namen „amp modeling“, abgeleitet von der englischen Kurzform für Gitarrenverstärker, dem *amp*.

Der große Durchbruch gelang der Firma ein Jahr später mit dem „POD“. LINE6 beschränkte sich auf den DSP-Teil und verzichtete auf Leistungsverstärker und Lautsprecher. Dafür war das Gerät so handlich und leicht, dass es mit in die Gitarrentasche passte. Der Musiker benötigte nur seine Gitarre und dieses eine Gerät. An den Ausgangsbuchsen wurde ein fertig gemischtes Signal ausgegeben, das direkt zur Wiedergabe über eine Saalanlage oder zur Aufzeichnung verwendbar war.

Heute, 15 Jahre später, sind digitale Verstärkersimulationen bereits etwas weiter verbreitet. Sogar einige Traditionsfirmen haben digitale Simulationen im Verkaufskatalog. Erhältlich sind handliche Zusatzgeräte, Racksysteme und vollwertige Bühnenverstärker. Großer Beliebtheit erfreuen sich auch die Software-Varianten, die als Plug-ins für das volldigitale Aufnahmestudio im PC erhältlich sind. Der Musiker kann die Gitarrenspur nun „clean“ aufnehmen und im Nachhinein den passenden Verstärkersound darüberlegen.

Wurde den digitalen Geräten der ersten Generation noch ein „steriler“, unnatürlicher Klang vorgeworfen, so ist den aktuellen Simulationen eine höhere Akzeptanz der kritischen Musiker zu bescheinigen. Grund ist die gesteigerte Authentizität der virtuellen Verstärker. Die fortschreitende Steigerung verfügbarer Rechenleistungen erlaubt die Implementierung immer komplizierterer

Modelle. Basierten die Modelle der ersten Generation noch auf recht abstrakten Ansätzen, wird bei den neueren Produkten auf analytische Methoden gesetzt.

Aber auch weiterhin besteht großes Potential für Verbesserungen. Solange der anspruchsvolle Musiker im direkten Hörvergleich zum Originalverstärker noch Unterschiede wahrnimmt, wird er virtuelle Verstärkermodelle nicht als vollkommen gleichwertig anerkennen.

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung, die dieser Arbeit zugrunde liegt, lässt sich wie folgt formulieren:

- Analoge Gitarrenverstärker sollen in digitale Modelle überführt werden, die als Programme auf einem Computer oder einem DSP lauffähig sind.
- Dabei wird die Forderung gestellt, dass das digitale Modell die Übertragungscharakteristik, letztlich den „Klang“ des Originalgerätes, authentisch nachbildet.
- Verlangt wird die Berechnung des Mischpultsignals, wie es bei einer klassischen Mikrofonabnahme vorliegen würde.

Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die Erarbeitung eines allgemeinen Ansatzes, mit dem die Modellierung beliebiger Schaltungen auf systematischem Wege möglich ist. Während der Forschungsarbeiten hat sich ein weiterer Schwerpunkt ergeben: Die zur Beschreibung von Elektronenröhren genutzten mathematischen Modelle sind nur bedingt für die Simulation übersteuerter Verstärkerstufen geeignet. Für eine authentische Verstärkersimulation werden daher auch verbesserte Röhrenmodelle benötigt.

- Es ist ein für die Simulation von übersteuerten Verstärkerstufen geeignetes Röhrenmodell zu entwickeln.

2 Grundlagen

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich die klassische Analyse/Synthese-Problematik. Ziel der Analyse ist die mathematische Beschreibung der Beziehung zwischen Eingang und Ausgang des Gerätes. Im zweiten Schritt wird diese in ein digitales Modell umgesetzt, also einen Algorithmus der digitalen Signalverarbeitung, welcher dann auf einem Signalprozessor oder einem Computer ausgeführt werden kann.

2.1 Ansätze zur Analyse

Die Ansätze zur Analyse einer Schaltung lassen sich grob in zwei Kategorien einordnen. Zum einen gibt es die Möglichkeit, die zu untersuchende Schaltung als *Blackbox* zu betrachten, sinnbildlich als eine schwarze Kiste, deren Inhalt man nicht kennt. Als Information über das System stehen lediglich die an den Ein- und Ausgängen messbaren Größen zur Verfügung, beispielsweise die Klemmensignale am Ausgang bei einer bestimmten Anregung am Eingang.

Die zweite Kategorie umfasst jene Ansätze, bei denen die Kenntnis des inneren Aufbaus vorausgesetzt und zur Modellbildung genutzt wird. Konsequenterweise wird von der *Whitebox*-Modellierung gesprochen. Für elektronische Schaltungen ist die Kenntnis der inneren Struktur im Allgemeinen durch den vollständigen Schaltplan gegeben. Diese vollständige Information führt in der Regel auch auf bessere Ergebnisse als die *Blackbox*-Betrachtung, daher basieren die meisten Verfahren auf diesem Prinzip.

2.2 Der Systembegriff

Unter einem System versteht man die Abbildung eines Eingangssignals $u(t)$ auf ein Ausgangssignal $y(t)$ [Fli91]. Ein System stellt also im Grunde genom-

men eine Blackbox mit einem Eingang und einem Ausgang dar, die sich durch eine Abbildung der Form $y(t) = \mathcal{T}\{u(t)\}$ beschreiben lässt.

Die zu untersuchenden Geräte besitzen alle Eigenschaften um, als Ganzes oder in Teile zerlegt, als klassische Systeme aufgefasst zu werden. Eine systemtheoretische Betrachtung ist daher geeignet und auch gebräuchlich.

2.2.1 Eigenschaften von Systemen

Als *linear* wird ein System bezeichnet, bei dem das Superpositionsprinzip gilt. Ist die Bedingung

$$\mathcal{T}\{k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)\} = k_1 \mathcal{T}\{u_1(t)\} + k_2 \mathcal{T}\{u_2(t)\} \quad (2.1)$$

erfüllt, so ist das System linear. Dabei sind $u_1(t)$, $u_2(t)$ beliebige Eingangssignale und k_1 , k_2 beliebige Skalare.

Die wichtigste System-Klasse ist die der linearen zeitinvarianten Systeme (LTI, engl. *linear time-invariant*), bei denen neben der Linearität nach Gleichung (2.1) zusätzlich gefordert ist, dass sich das Übertragungsverhalten des Systems nicht mit der Zeit ändert. Die entscheidende Eigenschaft von LTI-Systemen ist, dass diese eindeutig durch eine Impulsantwort $h(t)$ bestimmt sind. Die Abbildung $y(t) = \mathcal{T}\{u(t)\}$ lässt sich dann als Faltungsoperation $y(t) = u(t) * h(t)$ angeben.

Nichtlineare Systeme

Die Definition eines nichtlinearen Systems lässt sich direkt aus der Linearitätsbedingung ableiten: Ein System ist genau dann nichtlinear, wenn Gleichung (2.1) nicht erfüllt ist. Im Gegensatz zu den linearen Systemen existiert für nichtlineare Systeme keine geschlossene mathematische Theorie.

2.2.2 Systemklassifikation analoger Schaltungen

Die Annahme von Linearität und Zeitinvarianz gilt für alle elektrischen Schaltungen, die nur mit Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten aufgebaut sind. Grundsätzlich ist auch bei diesen *passiven* Bauelementen ein geringfügig nichtlineares Verhalten nachzuweisen (z.B. Tantal- oder Keramik-kondensatoren). Es ist jedoch vertretbar und angemessen, diese als linear anzunehmen. Folglich können Schaltungen, die ausschließlich aus passiven Bauelementen bestehen, als lineare Systeme betrachtet werden.

Darüber hinaus können aber auch Schaltungen mit aktiven Bauelementen, wie Transistoren oder Elektronenröhren, in die Kategorie der LTI-Systeme fallen. Aktive Bauelemente haben grundsätzlich eine nichtlineare Kennlinie, je nach Schaltungsauslegung muss diese jedoch nicht zwingend zu einem signifikant nichtlinearen Verhalten des Systems führen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden in erster Linie solche aktiven (Teil-)Schaltungen untersucht, die eine nichtlineare Übertragungscharakteristik aufweisen, oftmals sogar eine *stark* nichtlineare.

2.3 Grundlagen der Netzwerkanalyse

Als Einstieg in die Simulation analoger Schaltungen werden in diesem Abschnitt die grundlegenden Verfahren der symbolischen sowie der numerischen Netzwerkanalyse kurz erklärt [Phi00]. Dies ist sinnvoll, da die an späterer Stelle vorgestellten Verfahren zur *Echtzeitsimulation* aus diesen abgeleitet werden können oder sich zumindest einiger dieser Methoden bedienen. Da hier die Methodik im Vordergrund steht, sind die Betrachtungen zu Beginn auf einfache Widerstandsnetzwerke beschränkt.

2.3.1 Grundbegriffe

Als elektrisches Netzwerk wird die mathematische Beschreibung einer Verschaltung elektrischer Bauteile (Quellen, Widerstände, Kondensatoren usw.) bezeichnet. Der Zusammenschluss der Elemente wird dabei als Graph aufgefasst, der durch Maschen, Zweige und Knoten zu beschreiben ist. Die Netzwerkanalyse hat die Ermittlung der Ströme und Spannungen in einem Netzwerk zum Ziel.

Ein Knotenpunkt liegt in einem Netzwerk immer dann vor, wenn es zu einer Stromverzweigung kommt. Ein Zweig ist die Verbindung von zwei Knotenpunkten mit einem oder mehreren zweipoligen Bauelementen. Als Masche gilt ein geschlossener Umlauf, also ein Weg über die Zweige des Netzwerks mit gleichem Start- und Endpunkt.

Die mathematische Beschreibung beruht auf den *Kirchhoffschen Gesetzen*: Die *Knotenregel* (1. Kirchhoffsches Gesetz) besagt, dass in einem Knotenpunkt die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme

ist. Für einen Knotenpunkt mit n verbundenen Zweigen gilt daher

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (2.2)$$

Das zweite Gesetz ist als *Maschenregel* bekannt und fordert, dass die Summe aller Teilspannungen in einem geschlossenen Umlauf sich zu Null ergibt. Für eine Masche mit n Teilspannungen bedeutet dies

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0. \quad (2.3)$$

Diese beiden Regeln sind für die Berechnung linearer Schaltungen vollkommen ausreichend.

2.3.2 Knotenpotentialverfahren

Beim Knotenpotentialverfahren werden die Knotenpunkte eines Netzwerks betrachtet. Für jeden Knoten ist eine Beziehung nach Gleichung (2.2) aufzustellen. Für ein Netzwerk mit k Knotenpunkten sind genau $(k - 1)$ Gleichungen festzulegen, der übrig gebliebene Knoten ist der Bezugspunkt für alle anderen Knoten. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, welches die Schaltung vollständig beschreibt. Die Notation erfolgt in vektorieller Form $\mathbf{GU} = \mathbf{I}$,

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{k-1} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

wobei \mathbf{G} die Leitwertmatrix, \mathbf{U} ein Vektor mit den Potentialen sämtlicher Netzwerkknoten und \mathbf{I} der Vektor mit allen Stromquellen ist. Eine gesuchte Ausgangsgröße, in der Regel die Spannungsdifferenz zwischen zwei Knotenpunkten, ist durch das Lösen von Gleichung (2.4) zu ermitteln. Für die Lösung sämtlicher Knotenpotentiale gilt $\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$.

Der große Vorteil des Knotenpotentialverfahrens ist die ausgezeichnete Eignung für eine Automatisierung. Sämtliche Vektoren sowie die Leitwertmatrix können auf systematischem Wege direkt aus der Schaltung ermittelt werden. Nachteilig ist, dass als Quellen lediglich ideale Stromquellen berücksichtigt werden können. Die in der Praxis bedeutenderen Spannungsquellen müssen zuvor in Stromquellen umgewandelt werden.

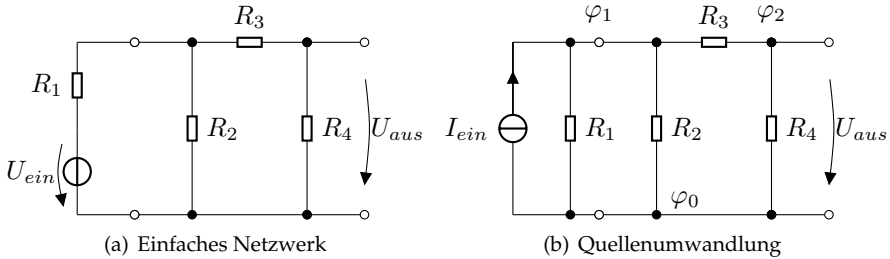


Abbildung 2.1: Betrachtung mit dem Knotenpotentialverfahren.

Beispiel

Als Beispiel für die Anwendung des Knotenpotentialverfahrens wird eine einfache Schaltung mit einer Spannungsquelle und vier Widerständen betrachtet, siehe Abbildung 2.1(a). In diesem Schaltplan sind $k = 3$ Knotenpunkte und $z = 4$ Zweige zu identifizieren. Bevor das Knotenpotentialverfahren angewendet werden kann, ist die Spannungsquelle mit Serienwiderstand in eine Stromquelle mit Parallelwiderstand umzuwandeln, es gilt $I_{ein} = U_{ein}/R_1$. Anschließend ist allen Netzwerkknoten ein Potential φ_i zuzuordnen, Knoten φ_0 ist in diesem Fall als Bezugspotential festgelegt. Dies ist in Abbildung 2.1(b) dargestellt. Die Knotengleichung für φ_1 ergibt sich zu

$$\varphi_1 : \frac{1}{R_1}(\varphi_1) + \frac{1}{R_2}(\varphi_1) + \frac{1}{R_3}(\varphi_1 - \varphi_2) = I_{ein}$$

oder, in der vorteilhafteren Leitwertdarstellung mit $G_i = \frac{1}{R_i}$,

$$\varphi_1 : G_1(\varphi_1) + G_2(\varphi_1) + G_3(\varphi_1 - \varphi_2) = I_{ein}. \quad (2.5)$$

In gleicher Weise ist auch für φ_2 eine Knotengleichung aufzustellen. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{ein} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

in der vektoriellen Notation nach Gleichung (2.4). Die Lösung nach allen Knotenspannungen ist allgemein mit $\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$ zu berechnen. Im vorgegebenen

Beispiel ist lediglich die Größe U_{aus} gefragt. Der Einfachheit halber wird diese mit der Cramerschen Regel direkt berechnet gemäß

$$\begin{aligned}
 U_{aus} = \varphi_2 &= \frac{\det \mathbf{G}_{\varphi_2}}{\det \mathbf{G}} = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & I_{ein} \\ -G_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{vmatrix}} \\
 &= I_{ein} \cdot \frac{G_3}{G_1 G_3 + G_2 G_3 + G_1 G_4 + G_2 G_4 + G_3 G_4}
 \end{aligned}$$

oder, bezogen auf das Ausgangsproblem wieder umgeformt,

$$U_{aus} = \varphi_2 = U_{ein} \cdot \frac{R_2 R_4}{(R_1 + R_2) R_4 + (R_1 + R_2) R_3 + R_1 R_2}. \quad (2.7)$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses wird jeder Elektronik-Bewanderte sogleich bestätigen, es ließe sich bei diesem überschaubaren Beispiel auch zügig per Hand berechnen.

2.3.3 Maschenstromverfahren

Beim Maschenstromverfahren basiert die mathematische Beschreibung auf der Maschenregel, Gleichung (2.3). Für ein Netzwerk mit k Knotenpunkten und z Zweigen sind $(z - k + 1)$ Maschengleichungen aufzustellen. Stromquellen sind vor der Betrachtung in Spannungsquellen umzuwandeln. Für jede Masche ist dabei ein geschlossener Maschenstrom i_{M_i} mit Umlaufsinn festzulegen. In vektorieller Notation ergibt sich das Gleichungssystem $\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{U}$ analog zu Gleichung (2.4) mit der Widerstandsmatrix \mathbf{R} , den Maschenströmen \mathbf{I} und den Spannungsquellen \mathbf{U} .

Vorteil der Maschenstromanalyse ist die dem Praktiker etwas vertrautere Beschreibung mit Widerständen und Spannungsquellen. Als Nachteil ist die kompliziertere Automatisierung zu nennen.

Beispiel

Als Beispiel wird erneut die Schaltung aus Abbildung 2.1(a) untersucht. Zunächst sind $z - k + 1 = 2$ Maschen festzulegen, diese sind in Abbildung 2.2

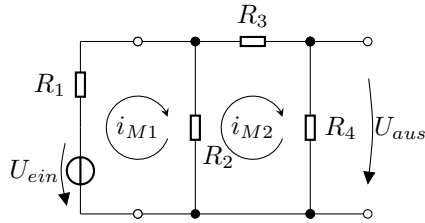


Abbildung 2.2: Betrachtung mit dem Maschenstromverfahren.

ingezeichnet. Die Gleichung für Masche M_1 lautet

$$M_1 : -U_{ein} + U_{R1} + U_{R2} = 0$$

oder, in Abhängigkeit der Maschenströme,

$$M_1 : R_1 i_{M1} + R_2 (i_{M1} - i_{M2}) = U_{ein}. \quad (2.8)$$

Mit der zweiten Maschengleichung $-U_{R2} + U_{R3} + U_{R4} = 0$ folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{M1} \\ i_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{ein} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Die Ausgangsgröße ist über den Spannungsabfall $U_{aus} = i_{M2} R_4$ zu berechnen, dabei ergibt sich der bereits bekannte Ausdruck nach Gleichung (2.7).

2.3.4 Modifiziertes Knotenpotentialverfahren

Eine praktische Erweiterung des gewöhnlichen Knotenpotentialverfahrens stellt das *modifizierte* Knotenpotentialverfahren dar (kurz MNA, für engl. *modified nodal analysis*). Dieses Verfahren bildet die Grundlage der meisten PC-Programme zur Elektroniksimulation, z.B. SPICE [McC87].

Die Beschreibung nach Gleichung (2.4) wird um weitere Gleichungen ergänzt, die zusätzlich die Zweigströme berücksichtigen. Durch diese Ergänzung können Spannungsquellen direkt im Gleichungssystem aufgeführt werden und müssen nicht in Stromquellen umgewandelt werden. Es gilt

weiterhin $GU = I$, die Struktur ändert sich jedoch allgemein zu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} g_{1,1} & \cdots & g_{1,k-1} & b_{1,k} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,k-1} & b_{k-1,m} & & \\ \hline c_{k,1} & & & d_{k-1,k} & & \\ & \cdots & c_{m,k-1} & & \ddots & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ i_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{U}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

wobei die Untermatrizen B , C und D von G lediglich Einträge der Form -1 , 1 oder 0 aufweisen (Ausnahme: gesteuerte Quellen). Es existieren verschiedene Varianten des Verfahrens. Bei manchen wird für jeden Zweig eine eigene Stromgleichung aufgestellt, andere begnügen sich mit Gleichungen für jene Zweige, die Spannungsquellen beinhalten.

Der Aufwand des modifizierten Verfahrens ist deutlich höher als bei der herkömmlichen Knotenpotentialanalyse, von einer manuellen Durchführung ist daher abzuraten. Hervorragend eignet es sich hingegen für die automatische Schaltungssimulation.

Beispiel

Angewandt auf das bereits bekannte Beispielnetzwerk ergibt sich, entsprechend der Nummerierung in Abbildung 2.3, das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & -G_1 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & 0 \\ -G_1 & 0 & G_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ I_{ein} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{ein} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Diese Formulierung unterscheidet sich von der gewöhnlichen Knotenspannungsanalyse zum einen durch den Knoten φ_3 , zum anderen durch die letzte Zeile, bei der die Zuordnung zur idealen Spannungsquelle getroffen wird. Die Lösung erfolgt auf dem vertrauten Wege und führt selbstverständlich zum gleichen Ergebnis.

2.3.5 Erweiterung auf RLC-Netzwerke

Die drei bislang besprochenen Analyseverfahren sind nicht auf die Analyse von Widerstandsnetzwerken beschränkt, sondern können auch für die Betrachtung von Schaltungen mit Kondensatoren und Induktivitäten genutzt

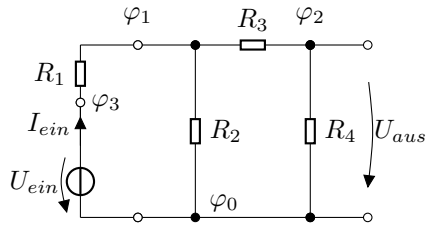


Abbildung 2.3: Betrachtung mit dem modifizierten Knotenpotentialverfahren.

werden. Allerdings ist die Analyse weiterhin auf das *stationäre* Verhalten beschränkt. Berechnet werden können Systeme in einem eingeschwungenen Zustand, was z.B. zur Bestimmung eines Arbeitspunktes nützlich ist. Die Analyse des *dynamischen*, zeitabhängigen Verhaltens erfordert ein anderes Vorgehen und wird im nachfolgenden Abschnitt 2.4 besprochen.

2.4 Berechnung zeitabhängiger Vorgänge

Kondensatoren und Induktivitäten sind energiespeichernde Schaltungselemente. Die wichtigste Eigenschaft dieser Elemente ist, dass sich die Energie nicht sprunghaft ändern kann. Zwischen zwei eingeschwungenen Zuständen treten daher Ausgleichsvorgänge auf, die eine Beschreibung mit Differentialgleichungen (DGL) erfordern.

2.4.1 Beschreibung im Zeitbereich

Die Definitionen von Kapazität und Induktivität beschreiben die Abhängigkeit zwischen Strom und Spannung über eine Differentialgleichung. Es gilt

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2.12)$$

für die Kapazität und

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.13)$$

für die Induktivität. Die Beschreibung eines Netzwerks mit l unabhängigen Energiespeichern führt entsprechend auf eine Differentialgleichung l -ter Ordnung [Nau85]. In der Praxis macht man sich zu Nutze, dass eine DGL der Form

$$\frac{d^l y(t)}{dt^l} + a_{l-1} \frac{d^{l-1} y(t)}{dt^{l-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_l \frac{d^l u(t)}{dt^l} + \dots + b_0 u(t), \quad (2.14)$$

mit konstanten Koeffizienten a_i und b_i , stets in ein System aus l gekoppelten DGLn erster Ordnung überführt werden kann. Beispielsweise ist für eine DGL zweiter Ordnung mit

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (2.15)$$

das äquivalente Gleichungssystem anzugeben mit

$$x_1(t) = y(t), \quad (2.16)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t) \quad (2.17)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{a_0}{a_2} \cdot x_1(t) - \frac{a_1}{a_2} \cdot x_2(t) + \frac{b_0}{a_2} \cdot u(t), \quad (2.18)$$

wobei die Größen x_1 und x_2 interne Zustände charakterisieren. Üblich ist die vektorielle Schreibweise mit

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{pmatrix} \cdot u(t). \quad (2.19)$$

Eine Anwendung findet sich in der Methodik der *Zustandsraumbeschreibung*, die ein wichtiges Werkzeug der Netzwerkanalyse darstellt. In den Kapiteln 4 und 5 dieser Arbeit folgt eine detaillierte Auseinandersetzung mit diesem Konzept, welches sich direkt aus der Systembeschreibung mit Differentialgleichungen ergibt.

Beispiel

Die mathematische Beschreibung des dynamischen Verhaltens soll durch ein Beispiel verdeutlicht werden. Betrachtet wird ein einfaches analoges Filter mit zwei Kondensatoren, siehe Abbildung 2.4. Die Zeitveränderlichkeit der Spannungen und Ströme wird durch die Verwendung von Kleinbuchstaben

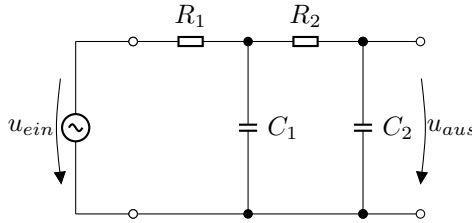


Abbildung 2.4: Filterschaltung mit zwei Energiespeichern.

angedeutet. Desweiteren wird zur Darstellung von Differentialquotienten die ebenfalls gebräuchliche, übersichtlichere Kurzform genutzt (\dot{x} ist die erste Ableitung nach der Zeit, \ddot{x} die zweite und so fort). Mit dem Ansatz der gewöhnlichen Maschenanalyse werden im ersten Schritt die unabhängigen Maschen

$$M_1 : 0 = -u_{ein} + u_{R1} + u_{C1} \quad (2.20)$$

$$M_2 : 0 = -u_{ein} + u_{R1} + u_{R2} + u_{C2} \quad (2.21)$$

identifiziert. Mit Gleichung (2.12) lässt sich der Spannungsabfall u_{R2} in Abhängigkeit des Stroms durch C_2 ausdrücken, dabei gilt $u_{R2} = R_2 C_2 \dot{u}_{C2}$. Aus den Gleichungen (2.20) und (2.21) folgt direkt $u_{C1} = u_{R2} + u_{C2}$. Eine Differentiation führt auf die wichtige Beziehung

$$\dot{u}_{C1} = R_2 C_2 \ddot{u}_{C2} + \dot{u}_{C2}. \quad (2.22)$$

Die systembeschreibende DGL ergibt sich durch Einsetzen in Masche M_2 und lässt sich schreiben als

$$0 = -u_{ein} + (R_1 R_2 C_1 C_2) \ddot{u}_{C2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \dot{u}_{C2} + u_{C2} \quad (2.23)$$

oder, entsprechend der üblichen Notation,

$$\ddot{u}_{C2} + \frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \dot{u}_{C2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} u_{C2} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} u_{ein}. \quad (2.24)$$

Gleichung (2.24) besitzt den Grad $l = 2$, was direkt aus den zwei Energiespeichern hervorgeht. Das äquivalente Differentialgleichungssystem ergibt sich mit den Zustandsvariablen $u_{C2} = x_1$, $\dot{u}_{C2} = \dot{x}_1$ und $\ddot{u}_{C2} = \dot{x}_2$ zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} & -\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{pmatrix} u_{ein}. \quad (2.25)$$

Anzumerken ist, dass diese Darstellung nicht eindeutig ist und es viele andere Systembeschreibungen gibt, die zum gleichen Ergebnis führen. Alternativ wäre es zum Beispiel möglich, die Spannungen u_{C1} und u_{C2} als Zustände zu definieren. Weitere Informationen und Beispiele können der Standardliteratur aus den Disziplinen der Netzwerk- oder Systemtheorie oder der Regelungstechnik entnommen werden, z.B. [Nau85, Fre87, Fli91].

2.4.2 Beschreibung im Frequenzbereich

Die Systembeschreibung mit Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssystemen führt schnell zu sehr komplizierten Ausdrücken. Für Schaltungen höherer Ordnung ist die Lösung der zugeordneten DGL nicht mehr zumutbar. Eine Alternative zur Lösung im Zeitbereich ist die Betrachtung des Systems im *Bild-* oder *Frequenzbereich*. Ganz allgemein wird die Aufgabe (in diesem Fall die DGL) unter Zuhilfenahme einer Integraltransformation in einen anderen Funktionenraum überführt, in dem die Lösung der Aufgabe einfacher zu berechnen ist. Der *Originalbereich*, dem die Beschreibung der Zeitabhängigkeit zugrunde liegt, und der *Bildbereich*, in dem die Betrachtung in Abhängigkeit einer Frequenz erfolgt, sind dabei völlig gleichberechtigt. „Komplizierte“ Rechenoperationen wie die Differentiation, Integration oder Faltung werden durch einfachere Rechenoperationen im Bildraum ersetzt. Für jede Integraltransformation existiert eine inverse Rücktransformation, mit der die Lösung zurück in den Originalbereich gebracht werden kann.

Für die Frequenzbetrachtung zeitkontinuierlicher Schaltungen ist die *einseitige Laplace-Transformation* mit dem Symbol \mathcal{L} besonders geeignet [Fli91]. Die Laplace-Transformierte einer kausalen Zeitfunktion $f(t)$ ist die durch

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (2.26)$$

definierte Bildfunktion $F(s)$ mit der komplexen Winkelfrequenz $s = \sigma + j\omega$. Die Rücktransformation erfolgt mit der *inversen Laplace-Transformation*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s)e^{st} ds. \quad (2.27)$$

Gewöhnliche DGLn mit konstanten Koeffizienten ähnlich Gleichung (2.14), wie sie aus der Beschreibung von RLC-Netzwerken hervorgehen, werden im Bildraum durch einfache algebraische Ausdrücke repräsentiert [Nau85]. Die

Lösung im Bildraum ist in der Regel mit nur geringem Aufwand verbunden, bei sehr einfachen Schaltungen kann sie sogar aus dem Schaltplan abgelesen werden. Für Widerstände, Kondensatoren und Induktivitäten ergeben sich im Bildbereich die Beziehungen

$$R \rightarrow R \quad U_R(s) = I_R(s) \cdot R \quad (2.28)$$

$$C \rightarrow \frac{1}{sC} \quad U_C(s) = I_C(s) \cdot \frac{1}{sC} \quad (2.29)$$

$$L \rightarrow sL \quad U_L(s) = I_L(s) \cdot sL, \quad (2.30)$$

mit denen eine Netzwerkanalyse auf dem gewohnten Wege durchzuführen ist. Ein typischer Anwendungsfall ist die Berechnung von Schaltvorgängen. Hierzu ist es erforderlich, auch die Spannungen in den Bildbereich zu transformieren. Die Eingangs-Ausgangs-Beziehung führt auf die Berechnung der Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich, die direkt auf den Frequenzgang des betrachteten Systems führt.

Es ist anzumerken, dass das Integral nach Gleichung (2.26) nur in Ausnahmefällen tatsächlich berechnet werden muss, ebenso die Rücktransformation nach Gleichung (2.27). In der Regel kann der Ingenieur auf Korrespondenztabelle zurückgreifen, in denen die elementaren Zuordnungen $f(t) \leftrightarrow F(s)$ verzeichnet sind [Fli91].

Beispiel

Betrachtet wird erneut die Beispielschaltung aus Abbildung 2.4. Die Maschenanalyse im Bildbereich ergibt

$$M_1 : 0 = -U_{ein}(s) + U_{R1}(s) + U_{C1}(s) \quad (2.31)$$

$$M_2 : 0 = -U_{ein}(s) + U_{R1}(s) + U_{R2}(s) + U_{C2}(s). \quad (2.32)$$

Außerdem lassen sich mit Gleichungen (2.28) und (2.29) die ohmschen Beziehungen für R_1 und R_2 angeben als

$$U_{R2}(s) = sR_2C_2U_{C2}(s) \quad (2.33)$$

$$U_{R1}(s) = sR_1C_1U_{C1}(s) + sR_1C_2U_{C2}(s). \quad (2.34)$$

Werden diese in M_2 eingesetzt, ergibt sich daraus

$$U_{ein}(s) = U_{C2}(s) \left(1 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2(R_1R_2C_1C_2) \right), \quad (2.35)$$

woraus sich durch Rücktransformation der bereits bekannte Ausdruck aus Gleichung (2.24) ergibt. Das Verhältnis aus Eingang $U(s) = U_{ein}(s)$ und Ausgang $Y(s) = U_{C2}(s)$ führt auf die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2(R_1R_2C_1C_2)} \quad (2.36)$$

welche die Schaltung im Frequenzbereich eindeutig charakterisiert.

2.5 Berechnung nichtlinearer Schaltungen

Die Berücksichtigung nichtlinearer Bauelemente erfordert meistens einen erheblichen Aufwand. Bei der Berechnung von Schaltungen mit nichtlinearen Bauelementen behilft sich der Ingenieur meist durch eine *Linearisierung im Arbeitspunkt*. Die Voraussetzungen für diesen Schritt sind, dass

- der Arbeitspunkt (AP) des betrachteten Bauteils in einem hinreichend linearen Teil der Übertragungskennlinie liegt
- und nur vergleichsweise kleine Auslenkungen um den AP zu erwarten sind.

Ist dies erfüllt, darf die Tangente zum AP anstelle der Kennlinie für die weitere Berechnung genutzt werden. Die gekrümmte Kennlinie wird also vereinfachend durch eine Gerade ersetzt, woraus sich wieder der lineare Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal ergibt.

Für die Modellierung von Schaltungsteilen mit einem ausgeprägt nichtlinearen Verhalten ist diese Maßnahme grundsätzlich nicht geeignet. In der Regel ist eine symbolische Lösung nicht zu ermitteln und der Einsatz numerischer, iterativer Verfahren wird notwendig. Auf die Beschreibung und Berechnung allgemeiner nichtlinearer Schaltungen wird in den Kapiteln 5 und 8 ausführlich eingegangen.

Den trivialen Sonderfall stellt die *statische Nichtlinearität* dar. Diese ist statisch (also gedächtnislos), da der Ausgangswert einzig vom Eingangswert abhängt. In der Praxis treten rein statische Nichtlinearitäten selten auf. Gelegentlich ist es jedoch möglich, ein dynamisches nichtlineares System näherungsweise in einen dynamischen linearen und einen statischen nichtlinearen Teil zu gliedern. Eine statische Nichtlinearität kann dann über eine Kennlinie beschrieben und in die Berechnung der angrenzenden Schaltungsteile einbezogen werden.

3

Modellierung von Gitarrenverstärkern

Dieses Kapitel stellt die wichtigen Ansätze zur Simulation von Gitarrenverstärkern vor. Bevor auf diese digitalen Modelle näher eingegangen werden kann, wird der grundsätzliche Aufbau der analogen Vorgänger vorgestellt.

3.1 Aufbau eines Gitarrenverstärkers

Gitarrenverstärker unterscheiden sich in ihrem Aufbau grundsätzlich von Hi-Fi-Verstärkern. Der Versuch, einen Gitarrenverstärker zweckentfremdet zur Wiedergabe von Musik zu nutzen, wird zu einem unbefriedigenden Ergebnis führen. Die gleiche Aussage gilt für den Anschluss einer E-Gitarre an einen Hi-Fi-Verstärker [Lem78].

Fast alle Gitarrenverstärker in Röhrentechnik lassen den gleichen Grundaufbau erkennen. Das Blockschaltbild eines typischen Röhrenverstärkers ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Stufen im Einzelnen sind [Zöl11]:

1. **Vorstufe:** In der Vorstufe erfolgt eine Vorverstärkung des Signals. Üblich sind mehrstufige Röhrenschaltungen, meist mit Trioden des Typs ECC83. Ein Großteil der nichtlinearen Verzerrungen wird in dieser Stufe produziert.
2. **Tone Stack:** Als Tone Stack bezeichnet man eine meist einfache, passive Klangregelung mit mehreren Einstellmöglichkeiten. Der Frequenzgang in Grundstellung ist in der Regel V-förmig.
3. **Phasenumkehrstufe:** Diese Stufe stellt zueinander phaseninvertierte Signale bereit, die zur Ansteuerung der nachfolgenden Gegentaktendstufe benötigt werden. Auch wenn dies nicht beabsichtigt ist, kann diese Stufe zum Klangcharakter beitragen.

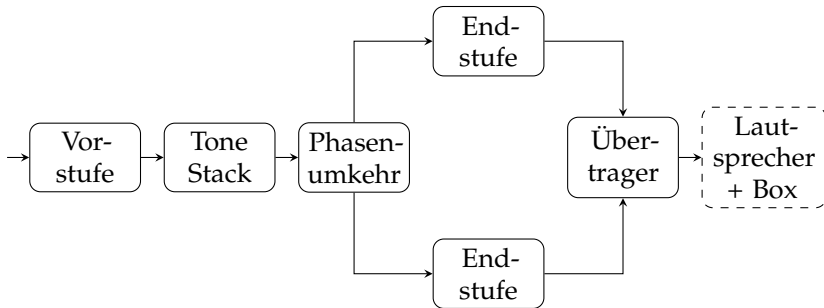


Abbildung 3.1: Blockschaltbild eines typischen Gitarrenverstärkers.

4. **(Gegentakt-)Endstufe:** Hier erfolgt die Leistungsverstärkung. Eingesetzt werden typischerweise End-Pentoden wie die EL34 oder Beam-Power-Tetroden wie die 6L6. Bei höheren Aussteuerungen entstehen auch hier klangverantwortliche Verzerrungen.
5. **Übertrager:** Der Ausgangsübertrager ist ein speziell gewickelter Transformator, der zur Impedanztransformation der niederohmigen Lautsprecherlast benötigt wird. Idealerweise arbeitet diese Stufe linear, bei einer hohen Aussteuerung kommt es jedoch zu einer magnetischen Sättigung, die ebenfalls harmonische Verzerrungen zur Folge hat.
6. **Lautsprecher und Box:** Der Lautsprecher wandelt die elektrische Leistung in Schall um. Typische Gitarrenlautsprecher unterscheiden sich dabei deutlich von den klangneutralen Hi-Fi-Typen. Neben einem recht unebenen Frequenzgang mit vielen Resonanzspitzen fällt vor allem die ausgeprägte Tiefpasscharakteristik (Grenzfrequenz bei 2 kHz bis 5 kHz) auf, siehe Abbildung 3.2. Auch die Bauweise des Gehäuses übt einen Einfluss auf das Übertragungsverhalten aus. In erster Näherung darf diese Stufe als lineares System betrachtet werden, obwohl es auch hier zu nichtlinearen Verzerrungen kommt [YBK08].

Zusätzlich bieten manche Verstärker umschaltbare Kanäle, Hallspiralen oder andere Erweiterungen. Der prinzipielle Aufbau behält aber seine Gültigkeit. Details zu den einzelnen Blöcken werden an späterer Stelle geliefert. Wichtig ist hier die Erkenntnis, dass ein Gitarrenverstärker ein recht komplexes,

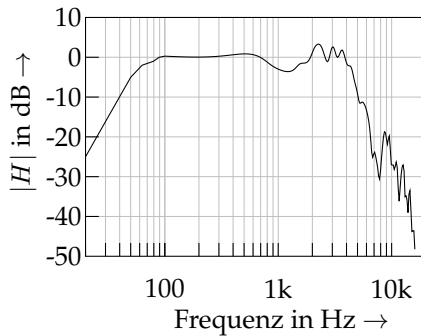


Abbildung 3.2: *Frequenzgang eines typischen Gitarrenlautsprechers mit Box.*

mehrstufiges Gebilde darstellt, bei dem jede einzelne Stufe einen wesentlichen Beitrag zum Klang liefern kann.

Effektgeräte für die E-Gitarre

Als Ergänzung zu den Gitarrenverstärkern ist eine Vielzahl weiterer elektronischer Geräte erhältlich, mit denen der Klang zusätzlich verändert werden kann. Typischerweise werden diese *Effektgeräte* zwischen die Elektrogitarre und den Verstärker geschaltet. Viele neuere Verstärker bieten aber auch spezielle Einschleifwege an, mit denen der Signalpfad hinter der Vorstufe aufgetrennt wird.

Das Angebot ist zu groß, als dass hier eine umfassende Betrachtung sinnvoll wäre. Großer Beliebtheit erfreuen sich vor allem die *Gitarrenverzerrer*, die gezielte harmonische Verzerrungen des Gitarrensymbols hervorrufen. Die typischen Gerätebezeichnungen wie *Overdrive*, *Distortion* oder *Fuzz* verweisen dabei auf klangliche Unterschiede, die dem Gitarristen vertraut sind.

3.2 Allgemeine Herangehensweise

Um eine analoge Schaltung in ein digitales Modell zu überführen, ist es durchaus lohnenswert, einige Vorüberlegungen zu treffen. Prinzipiell ist zwar eine Automatisierung möglich [YAS10]; eine manuelle Schaltungsanalyse ist jedoch im Hinblick auf ein möglichst einfaches und klar strukturiertes Modell

weiterhin zu empfehlen. Eine sinnvolle Reihenfolge der Arbeitsschritte ist dabei:

1. Gliederung in Teilsysteme
2. Wahl geeigneter Verfahren
3. Nutzung von Vereinfachungen.

Diese Arbeitsschritte werden im Folgenden erläutert.

3.2.1 Gliederung in Teilsysteme

Die wichtigste Vorüberlegung besteht in einer Aufteilung des Gesamtsystems in geeignete Teilsysteme. Im einfachsten Fall zerfällt eine Schaltung in einzelne Teilschaltungen, die unabhängig voneinander betrachtet und simuliert werden können. Die notwendige Bedingung aus elektronischer Sicht ist, dass die einzelnen Teilsysteme voneinander entkoppelt werden können. Bei vielen analogen Effektgeräten neuerer Generation ist das gut möglich, da sie ganz offensichtlich mit eben dieser Herangehensweise entwickelt wurden. Sehr häufig basiert der Signalpfad auf einer Kaskade von Operationsverstärker- und JFET-Stufen, die jeweils eine bestimmte Aufgabe zu erfüllen haben. Als Beispiel sei das Verzerrerpedal SD-1 der Fa. BOSS genannt, das leicht in vier Stufen aufteilbar ist [HDZ11], siehe Blockschaltbild in Abbildung 3.3. Jede Stufe zeichnet sich durch eine sehr hohe Eingangs- sowie durch eine geringe Ausgangsimpedanz aus, womit Belastung und Rückwirkung vernachlässigbar klein sind.

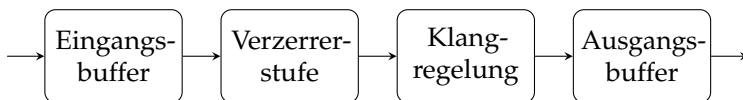


Abbildung 3.3: Kaskadierter Aufbau des Effektgerätes SD-1.

Bei vielen Schaltungen ist die Annahme der Rückwirkungsfreiheit nicht zulässig, womit die Aufteilung in Teilsysteme nicht ohne Weiteres möglich ist. Solche Schaltungen sind in der Regel als Gesamtsystem zu betrachten.

Eine Näherung zu diesem Problem wurde von Macak und Schimmel vorgeschlagen [MS10]. Diskutiert wird eine Serienschaltung dreier gekoppelter Triodenstufen sowie nachfolgender Blöcke. Derartige Schaltungen sind in

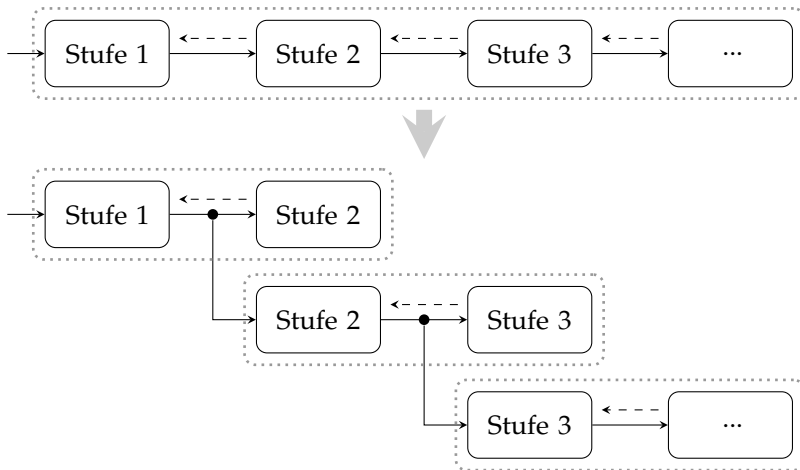


Abbildung 3.4: Aufspaltung einer nicht rückwirkungsfreien Serienschaltung.

einigen Gitarrenverstärkern zum Erreichen höherer Verzerrungen vorgesehen. Jede dieser Stufen ist dabei als nicht rückwirkungsfrei anzusehen. Anstatt die gesamte Kaskade als Einheit zu simulieren, wird sie in Teilsysteme, in Stufen zerlegt. Für die Simulation werden jeweils die zwei aufeinanderfolgenden Stufen zu einem Block zusammengefasst. Die zwei Stufen eines Blocks werden gemeinsam simuliert, wobei die hintere Stufe mit einer konstanten Last abgeschlossen wird. Das Signal zwischen den beiden Stufen bildet dann jeweils das Eingangssignal für den nächsten Block. Stufe (1) „sieht“ somit als Last die Stufe (2), die Rückwirkung von Stufe (3) auf Stufe (1) wird jedoch vernachlässigt usw. Abbildung 3.4 verdeutlicht das Prinzip. Die Autoren konnten nachweisen, dass der Fehler im Vergleich zur Simulation des Gesamtsystems gering ist [Mac10].

3.2.2 Wahl geeigneter Simulationsansätze

Die Wahl des geeigneten Ansatzes ist abhängig von vielen Faktoren. An erster Stelle ist für jedes Teilsystem die Linearitätsbedingung zu prüfen. Ebenfalls von großer Bedeutung ist die Unterscheidung zwischen parameterabhängigen und parameterunabhängigen Teilsystemen.

Die Frage, welcher Ansatz für welches System zu wählen ist, ist ein wichtiger Aspekt dieser Arbeit. Sie wird, nachdem die einzelnen Ansätze vorgestellt wurden, näher diskutiert.

Einen Überblick über aktuelle wie auch althergebrachte Methoden geben Pakarinen und Yeh in einem Review-Artikel [PY09]. Vorgestellt sind Methoden, die Gegenstand wissenschaftlicher Publikationen oder Patentschriften waren.

3.2.3 Nutzung von Vereinfachungen

In vielen Fällen ist es darüber hinaus möglich, die Schaltung weiter zu vereinfachen. Dieser Schritt ist mit großer Sorgfalt vorzunehmen, um die wichtigen Eigenschaften nicht zu verlieren. So ist es durchaus denkbar, auch Teilschaltungen mit aktiven, nichtlinearen Elementen als lineare Systeme zu betrachten, sofern eine Linearisierung im Arbeitspunkt zulässig ist. Befinden sich Operationsverstärker im Signalpfad, so können diese meistens als ideal angenommen werden. Dennoch ist in jedem Einzelfall zu prüfen, ob eine Vereinfachung auch gestattet ist.

In allen Fällen sind Messungen an einer Referenzschaltung notwendig. Ist dies nicht möglich, sind Simulationen z.B. mit SPICE vorzunehmen.

3.3 Abstrakte Ansätze zur digitalen Simulation

Auch wenn die meisten Ansätze analytischer Natur sind, so wird doch immer wieder versucht, die Klangformung eines Gitarrenverstärkers ganz abstrakt zu betrachten. Den Kern stellen dabei stets Funktionsblöcke dar, die für die benötigte Verzerrung des Signals sorgen. Durch zusätzliche Digitalfilter erfolgt dann die Vorgabe eines Frequenzgangs. Viele Verstärkersimulationen der ersten Generation lassen eine derartige abstrakte Funktionsweise erkennen.

3.3.1 Generierung von Verzerrungen

Zur Generierung harmonischer Verzerrungen existieren viele Ansätze, die meisten beruhen auf der Approximation über Kennlinien (Abschnitt 3.3.2). Es gibt jedoch auch „exotische“ Realisierungen, denen durchaus originelle Ideen zugrunde liegen.

Beim „Mantissa-Fuzz“ [Mas96] werden harmonische Verzerrungen durch bitweise Manipulation der Samples hervorgerufen. Dies geschieht in Ab-

hängigkeit von Vorzeichen und höchstwertigster Bitstelle. Der Algorithmus benötigt nur wenige Operationen und ist besonders effizient. Nachteilig ist, dass die Verzerrung nur bedingt verändert werden kann. Die Vorgabe einer gewünschten Übertragungscharakteristik ist nicht vorgesehen.

In [Pek08] wird ein digitales Allpassfilter zur Erzeugung von Oberwellen genutzt. Der Effekt beruht auf einer Verzerrung der Phase, dazu werden die Allpass-Koeffizienten zeitvariant moduliert. Das Modulationssignal kann aus dem tiefpassgefilterten Eingangssignal gewonnen oder aber durch einen Oszillator vorgegeben werden. Durch die Wahl verschiedener Modulationssignale wird eine gewisse klangliche Flexibilität erreicht, eine Ähnlichkeit zu bestehenden Gitarrenverstärkern oder -verzerrern ist jedoch nicht gegeben.

3.3.2 Statische Waveshaper

Als statische Waveshaper werden Funktionsblöcke bezeichnet, die eine Eingangs-Ausgangs-Beziehung mit Hilfe einer Kennlinie realisieren. Diese Kennlinie kann durch eine mathematische Funktion oder aber in Form einer Tabelle beschrieben werden. Eine typische punktsymmetrische Kennlinie realisiert z.B. der Tangens Hyperbolicus, dessen Abbildung $y = \tanh(ax)$ sich zur Signalverzerrung eignet.

Mit einer Kaskade, bestehend aus einem einfachen Filter, einer statischen Kennlinie und einem weiteren Filter, lassen sich bereits Klänge erzeugen, die denen eines Gitarrenverstärkers ähnlich sind [PY09, DHMZ09, Zöl11]. Abbildung 3.5 illustriert diesen Ansatz. Sehr ähnliche Kaskaden lassen sich auch in Patenten der Firmen YAMAHA [AS96] und LINE6 [DMRS98] identifizieren. Mit dieser Topologie liegt dann ein System vor, dessen Übertragungscharakteristik an vielen Parametern (Filterkoeffizienten, Kennlinienvorgaben) geändert werden kann. Eine klangliche Annäherung an eine vorgegebene Charakteristik ist möglich, sie erfordert jedoch viel Erfahrung und ein gutes Gehör.

Neben der rein abstrakten Modellierung ist die Integration in schaltplanorientierte Simulationen möglich, wobei nichtlineare Bauteile durch eine gemessene Kennlinie ersetzt werden. Diese Methode steht also im direkten Zusammenhang mit der Identifikation statischer Nichtlinearitäten, wie sie in Abschnitt 2.5 eingeführt wurden.

Eine geeignete Methode für die Messung dieser Kennlinien und die Einbindung in eine Simulation wird in [MGZ02] vorgestellt. Als problematisch erweisen sich veränderliche Systeme, beispielsweise Schaltungen, in denen mit einem Potentiometer Einfluss auf die Kennlinien ausgeübt wird. Hier

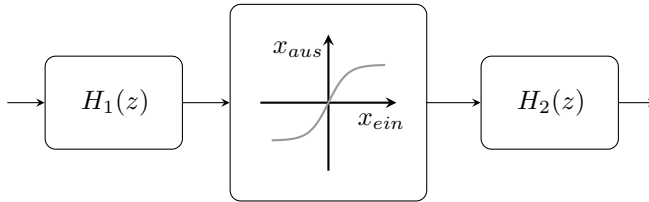


Abbildung 3.5: Kaskade aus Filter, statischer Kennlinie und Filter.

ist eine einzelne Kennlinie dann nicht ausreichend, stattdessen ist für jede Potentiometerstellung eine eigene Kennlinie bereitzuhalten.

Die Problematik parameterabhängiger Kennlinien wird in den Kapiteln 5.4.1 und 5.4.2 weiter vertieft.

3.4 Analytische Ansätze zur digitalen Simulation

Die Verstärkersimulationen der neueren Generation basieren auf analytischen Ansätzen und orientieren sich an der Originalschaltung. Dies wird zumindest durch die Werbung der Hersteller suggeriert. Ein Beispiel ist die VCM-Technologie (für *Virtual Circuitry Modeling*) des Herstellers YAMAHA. Im Werbetext ist dort von „minutiöser Schaltkreisanalyse“ und Modellierung „bis zum letzten Widerstand und Kondensator“ die Rede. Sogar im Niedrigpreissegment erscheinen die ersten digitalen Nachbildungen mit diesem Anspruch. Unter der Bezeichnung TSAC (für *True Simulation of Analog Circuit*) werden preisgünstige Geräte aus fernöstlicher Produktion angeboten.

Die analytischen Ansätze setzen eine Systemkenntnis voraus, die zum Beispiel durch den vollständigen Schaltplan gegeben sein kann. Entsprechende Analyseschritte wurden bereits im Grundlagenkapitel behandelt. Die digitale Modellbildung basiert in der Regel direkt auf der Systemanalyse.

3.4.1 Digitale Filter

Lineare Analogfilter lassen sich leicht in äquivalente Digitalfilter überführen. Die gängige Strategie ist die Anwendung der bilinearen Transformation

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (3.1)$$

mit dem Abtastintervall $T = 1/f_A$, mit der die Pole und Nullstellen der zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion im S-Bereich voneinander unabhängig in die Z-Ebene übertragen werden [Zöl05]. Die resultierende zeitdiskrete Übertragungsfunktion $H(z)$ approximiert den Verlauf von $H(s)$ in guter Näherung.

Oftmals liegen die Koeffizienten von $H(s)$ in einer symbolischen Form vor. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Übertragungsfunktion auf analytischem Wege aus einer analogen Schaltung ermittelt wurde und die Koeffizienten als Kombinationen der Schaltungselemente gegeben sind (vergleiche hierzu Abschnitt 2.4.2). Durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) lassen sich die Koeffizienten des Digitalfilters ebenfalls leicht in einer symbolischen Form angeben, was bei der Implementierung parameterabhängiger Filter von Vorteil ist.

3.4.2 Wellendigitalfilter

In der Vergangenheit wurde immer wieder die Modellierung von Verstärkerstufen mit Wellendigitalfiltern (WDF, engl. *Wave Digital Filter*) vorgeschlagen. Da diese Technologie im weiteren Verlauf des Textes unberücksichtigt bleibt, wird ihre Erläuterung hier auf wesentliche Punkte beschränkt. Detaillierte Informationen bietet der Originalaufsatz [Fet86].

Wellendigitalfilter sind spezielle digitale Filter, deren Entwurf sich direkt an analogen Filterschaltungen orientiert. Die Filterstruktur ist rekursiv und, wie gewöhnliche Digitalfilter auch, nur aus Addierern, Verzögerungsgliedern und Multiplizierern zusammengesetzt.

Ausgangspunkt ist stets das sogenannte Referenzfilter, welches komponentenweise durch digitale Strukturen ersetzt wird. Die Signale werden jedoch nicht über Ströme und Spannungen, sondern über Wellengrößen dargestellt. Kapazitäten, Induktivitäten und weitere Grundelemente werden dabei durch Zweipole repräsentiert, an denen einfallende Wellen reflektiert, gestreut oder absorbiert werden können. Diese werden dann, entsprechend der Netzwerktopologie des Referenzfilters, durch *Adaptoren* miteinander verbunden. Es existieren Serien- und Paralleladaptoren mit mehreren Anschlüssen. Bildlich gesprochen stehen dem Anwender eine Reihe von Bausteinen zur Verfügung, mit denen er das gewünschte Wellendigitalfilter direkt zusammensetzen kann.

Die Modellierung von nichtlinearen Netzwerken ist möglich, setzt jedoch die Entwicklung zugeschnittener nichtlinearer Elemente voraus. In [KP06, PK10] wurde ein Modell für eine Triode vorgestellt und erfolgreich zur

Simulation einer Röhrenvorstufe genutzt. Eine weiterführende Arbeit befasste sich mit der Modellierung einer Röhrenendstufe [PTK09].

Vorteile der WDF sind eine geringe Empfindlichkeit der Filterkoeffizienten sowie ausgezeichnete Stabilitätseigenschaften für LTI-Systeme. Auch für nichtlineare Systeme werden gute Ergebnisse berichtet [PTK09]. Es gibt jedoch eine Reihe ungelöster Probleme, die den Einsatz dieser Technik begrenzen. Die wohl wichtigste Einschränkung betrifft Strukturen, die sich nicht als Binärbaum darstellen lassen, z.B. Brückenschaltungen oder Rückkopplungen. Diese führen in der WDF-Struktur zu verzögerungsfreien Schleifen und sind nur schwer realisierbar. Darüber hinaus ist die Anwendung bei Schaltungen mit mehreren nichtlinearen Elementen problematisch [Zöl11]. Weiterhin ist zu beachten, dass die Filterstrukturen nie kanonisch sind, d.h. WDF erfordern einen höheren Speicher- und Rechenbedarf als herkömmliche Filterstrukturen.

3.4.3 Zustandsbasierte Techniken

Physikalische Systeme, deren Ausgangsgrößen zu jedem Zeitpunkt nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen, sondern auch von deren vorangehenden Werten abhängen, heißen dynamische Systeme. Sie haben ein „Gedächtnis“ oder einen *Zustand*, da interne Speicher die Verteilung von Energien im System bestimmen.

Der Begriff des Zustands und die damit verbundenen *Zustandsraummodelle* wurden in Grundzügen bereits in Abschnitt 2.4.1 für zeitkontinuierliche LTI-Systeme motiviert. Man versteht darunter die mathematische Beschreibung eines Systems durch ein Differentialgleichungssystem, in welches die internen Energiespeicher als Zustandsvariablen eingehen. Das Konzept ist nicht zwingend auf LTI Systeme beschränkt. Zeitvariante oder nichtlineare Systeme können ebenfalls im Zustandsraum beschrieben werden.

Eine äquivalente Beschreibung lässt sich auch für zeitdiskrete Systeme formulieren. Statt der Differentialgleichungen wird das Modell dann entsprechend durch gekoppelte Differenzgleichungen beschrieben. Die Anwendung für die Echtzeitsimulation von Gitarrenverstärkern oder anderen nichtlinearen Schaltungen ist dadurch grundsätzlich möglich. Verschiedene Varianten werden unter anderem in [BPR00, Yeh09, DHZ10, MS10, HZ11] vorgeschlagen. Das Zustandsraumkonzept ist ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit und wird ausführlich in den beiden nachfolgenden Kapiteln behandelt.

4 Lineare Systeme im Zustandsraum

Die Zustandsraumdarstellung ist eine verbreitete Technik zur Modellierung physikalischer Systeme. Anwendung findet sie vor allem in der Regelungstechnik, aber auch in der Systemtheorie. Ein großer Vorteil gegenüber anderen Modellansätzen ist, dass der Zustandsraum nicht auf zeitinvariante lineare Systeme beschränkt ist. Darüber hinaus lassen sich auch zeitvariante oder nichtlineare Systeme beschreiben. Insbesondere eignet sich diese Methode für die Modellierung elektronischer Schaltungen.

4.1 Zeitkontinuierliche Beschreibung

Die vollständige allgemeine Zustandsraumdarstellung für ein lineares, zeitinvariantes System besteht aus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{u}(t), \quad (4.2)$$

wobei Gleichung (4.1) als *Zustandsdifferential-* oder *Zustandsgleichung* und Gleichung (4.2) als *Ausgangsgleichung* bezeichnet wird [Fre87]. Ferner werden \mathbf{A} als Systemmatrix, \mathbf{B} als Eingangsmatrix, \mathbf{D} als Ausgangsmatrix und \mathbf{E} als Durchgangsmatrix bezeichnet¹. Die Eingangsgrößen des Systems werden zu dem Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ zusammengefasst, die Ausgangsgrößen im Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$. Die Zustände werden durch die physikalischen Energiespeicher im System bestimmt. Die minimale Anzahl der benötigten Zustände ergibt sich aus der Anzahl der voneinander linear unabhängigen

¹ Bereits hier wird von der üblichen Nomenklatur abgewichen, bei der die Matrizen die Symbole \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} erhalten. Dies ist sinnvoll, da die Beschreibung nach Gleichungen (4.1) und (4.2) an späterer Stelle um weitere Terme erweitert werden soll und so die Konsistenz gewahrt wird. Ferner wird für die Einheitsmatrix das Symbol \mathbf{I} genutzt, um Verwechslungen mit der Durchgangsmatrix vorzubeugen.

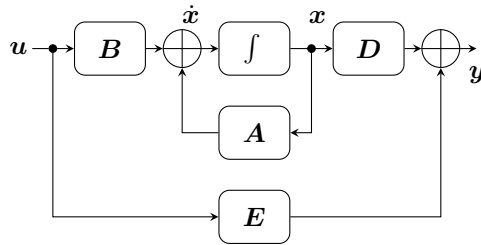


Abbildung 4.1: Grafische Veranschaulichung des linearen Zustandsraummodells.

Energiespeicher. Sie werden zum Zustandsvektor $x(t)$ zusammengefasst. Das Blockschaltbild in Abbildung 4.1 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Für die allgemeine Systembeschreibung sei l die Anzahl der Zustände, r die Anzahl der Eingänge und m die Anzahl der Ausgänge.

Die allgemeine Lösung im Zeitbereich ergibt sich direkt aus dem Differentialgleichungssystem in Gleichung (4.1). Die Anwendung des Standard-Lösungsansatzes *Variation der Konstanten* führt unter Berücksichtigung des Anfangszustands x_0 auf

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{D} e^{At} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{E} \mathbf{u}(t). \quad (4.4)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird, im Hinblick auf eine bessere Lesbarkeit, auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit verzichtet. Für Zustands- und Ausgangsgleichung folgt somit anstelle von Gleichungen (4.1) und (4.2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{E} \mathbf{u}, \quad (4.6)$$

die sich weiterhin auf den aktuellen Zeitpunkt t beziehen.

4.1.1 Eigenschaften des Zustandsraums

4.1.1.1 Steuerbarkeit

Ein lineares System ist *vollständig steuerbar*, wenn es in einer endlichen Zeit $t_0 \leq t \leq t_1$ durch Anregung mit einem geeigneten Eingang $u(t)$ aus einem Anfangszustand $x(t_0)$ in jeden beliebigen Endzustand $x(t_1)$ überführt werden kann. Synonym wird auch der Begriff *erreichbar* verwendet.

Zur Überprüfung wird die Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_C = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{(l-1)}B \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

herangezogen, die für ein System mit l Zustandsvariablen und r Eingängen genau l Zeilen und $l \cdot r$ Spalten aufweist. Sind unter diesen $l \cdot r$ Spaltenvektoren l linear unabhängig, gilt also

$$\text{Rang}(Q_C) = l, \quad (4.8)$$

so ist das System vollständig steuerbar [Fre87].

4.1.1.2 Steuerbarkeit des Ausgangs

Eine ähnliche Aussage kann auch für die Ausgangsgrößen eines Systems getroffen werden. Als *ausgangssteuerbar* wird definiert, wenn jeder Ausgang vom Anfangswert $y(t_0)$ in einer endlichen Zeit $t_0 \leq t \leq t_1$ durch Anregung mit einem geeigneten Eingang $u(t)$ zu einem beliebigen Endwert $y(t_1)$ überführt werden kann. Mit der Matrix

$$Q_A = \begin{pmatrix} DB & DAB & \dots & DA^{(l-1)}B & E \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

wird diese Bedingung geprüft. Für ein System mit m Ausgängen ist diese Bedingung erfüllt, wenn für die $m \times (l \cdot r + r)$ -Matrix Q_A gilt

$$\text{Rang}(Q_A) = m. \quad (4.10)$$

Systeme mit nur einer Ausgangsgröße ($m = 1$) sind folglich grundsätzlich ausgangssteuerbar [Fre87].

4.1.1.3 Beobachtbarkeit

Die Steuerbarkeit gibt eine Aussage über die Systemzustände bzw. den Ausgang und bezieht sich dabei auf den Eingang. Die Eigenschaft *vollständig*

beobachtbar hingegen betrachtet die Systemzustände bezogen auf den Ausgang. Ein System ist beobachtbar, wenn sich aus der Kenntnis des Eingangs $u(t)$ und Ausgangs $y(t)$ jeder Zustand $x(t)$ in einem endlichen Zeitbereich $t_0 \leq t \leq t_1$ bestimmen lässt [Fre87]. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Prüfmatrix

$$Q_O = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ \dots \\ DA^{l-1} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

für ein System der Ordnung l den Rang l besitzt.

4.1.1.4 Stabilität

Ein System in Zustandsraumdarstellung ist *asymptotisch stabil*, wenn nach einer beliebigen Anfangsauslenkung $x_0 \neq 0$ die Zustände asymptotisch abklingen und gegen Null streben. Zur Überprüfung ist die charakteristische Gleichung

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (4.12)$$

zu untersuchen. Das Symbol I kennzeichnet dabei eine Einheitsmatrix. Stabilität ist dann gegeben, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil haben, also für die Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A gilt

$$\text{real}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i. \quad (4.13)$$

4.1.2 Übertragungsmatrix

Liegt die Zustandsraumbeschreibung in Form der Matrizen A , B , D und E vor, so kann diese auf einfache Weise in eine Übertragungsmatrix in der S -Ebene überführt werden. Es gilt

$$H(s) = D(sI - A)^{-1}B + E \quad (4.14)$$

unter der Voraussetzung, dass der Anfangszustand $x(0) = 0$ ist. H ist für die allgemeine Betrachtung eine Matrix mit m Zeilen.

Sind nur eine Ausgangsgröße $m = 1$ und eine Eingangsgröße $r = 1$ definiert, ergibt sich eine Übertragungsfunktion $H(s)$ in gewohnter Form [Fli91].

4.2 Zeitdiskrete Beschreibung

Das Konzept des Zustandsraums ist direkt auf zeitdiskrete Systeme übertragbar. Die äquivalente zeitdiskrete Beschreibung des Zustandsraums lautet

$$\mathbf{x}(n+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(n) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(n) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{y}(n) = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{x}(n) + \bar{\mathbf{E}}\mathbf{u}(n) \quad (4.16)$$

und definiert die Zustands- und Ausgangsgleichung an diskreten Zeitpunkten n . Um Verwechslungen zu vermeiden, sind die Matrizen der zeitdiskreten Gleichungen mit einem Balken versehen. Es ist $\bar{\mathbf{A}}$ die Systemmatrix des diskretisierten und \mathbf{A} die Systemmatrix des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells.

Alle Eigenschaften zeitkontinuierlicher Zustandsraummodelle, wie Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit, sind direkt auf die zeitdiskreten Modelle übertragbar. Auch für die Stabilität existiert ein äquivalenter Ausdruck; diese ist genau dann gegeben, wenn alle Eigenwerte von $\bar{\mathbf{A}}$ innerhalb des Einheitskreises liegen [Fli91].

Um von der Systembeschreibung in zeitkontinuierlicher auf eine gleichwertige Beschreibung in zeitdiskreter Form zu gelangen, ist eine *Diskretisierung* vorzunehmen. Die wichtigsten Diskretisierungsmethoden werden im nachfolgenden Abschnitt behandelt.

4.3 Diskretisierungsmethoden

Konventionen: Im Folgenden bezeichnen $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{u}(n)$ und $\mathbf{y}(n)$ Größen eines zeitkontinuierlichen Systems, die zu diskreten Zeitpunkten n ausgewertet werden. Der Funktion nach sind diese äquivalent zu den Größen $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$, wie sie im vorangegangenen Abschnitt eingeführt wurden; sie sind jedoch nicht identisch. Darüber hinaus ist $\dot{\mathbf{x}}(n)$ die zeitkontinuierliche Ableitung von \mathbf{x} , ausgewertet zum Zeitpunkt n . Der Abstand zwischen den diskreten Zeitpunkten ist T .

Die mathematische Systembeschreibung führt im Allgemeinen auf lineare oder auch nichtlineare Differentialgleichungen (DGL oder auch ODE - *ordinary differential equation*) erster Ordnung. Eine analytische Lösung im Zeitbereich ist in den meisten Fällen nicht, oder nur unter großem Aufwand, möglich. Abhilfe schaffen numerische Lösungsverfahren, welche iterativ die Lösung berechnen.

Dazu ist zunächst eine Diskretisierung der Zeit nötig, also der Übergang von infinitesimal kleinen Schritten hin zu diskreten Intervallen. Das numerische Lösen einer DGL lässt sich auf das Problem der numerischen Integration zurückführen. Aus der DGL der zeitkontinuierlichen Betrachtung wird eine Differenzengleichung.

4.3.1 Explizites Euler-Verfahren

Das explizite Euler-Verfahren gehört zur Gruppe der Einschrittverfahren und ist der einfachste Ansatz für die numerische Integration bzw. Differentiation. In der Literatur wird es oftmals auch als *Polygonzug-* oder *Vorwärts-Euler-Verfahren* geführt. Beim expliziten Euler-Verfahren wird der Funktionswert einer Funktion aus deren Steigung beim vorangegangenen Zeitschritt bestimmt. Es gilt die Beziehung

$$T\dot{\mathbf{x}}(n-1) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n-1). \quad (4.17)$$

Diese geometrische Überlegung ist in Abbildung 4.2(a) dargestellt. Gleichung (4.17) ist explizit, da zur Berechnung des Funktionswertes nur Größen aus dem vorangegangenen Schritt benötigt werden. Entsprechend lässt sich die Berechnungsvorschrift für den neuen Funktionswert angeben als

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n-1) + T\dot{\mathbf{x}}(n-1). \quad (4.18)$$

Angewendet auf die Berechnungsvorschrift des zeitkontinuierlichen Zustandsraums für den Zeitpunkt n erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \quad (4.19)$$

$$T(\mathbf{A}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1)) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n-1), \quad (4.20)$$

und schließlich durch Auflösen nach $\mathbf{x}(n)$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n-1) + T\mathbf{A}\mathbf{x}(n-1) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(n-1) \quad (4.21)$$

$$= (\mathbf{I} + T\mathbf{A})\mathbf{x}(n-1) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(n-1). \quad (4.22)$$

Das Ausgangssignal wird durch

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{D}\mathbf{x}(n) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) \quad (4.23)$$

bestimmt.

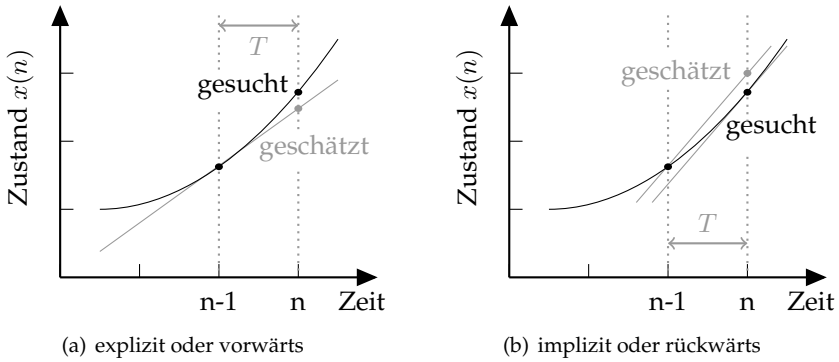


Abbildung 4.2: Grafische Veranschaulichung der Euler-Verfahren.

Das Stabilitätsgebiet des expliziten Euler-Verfahrens wird in der Laplace-Transformierten des zeitkontinuierlichen Systems durch einen Kreis an der Position -1 mit Radius 1 beschrieben. Daraus ergibt sich, dass nicht alle stabilen zeitkontinuierlichen Systeme beim Diskretisierungsschritt auch auf stabile zeitdiskrete Systeme abgebildet werden.

Transformationsregeln für das explizite Euler-Verfahren

Liegt eine Zustandsraumbeschreibung in zeitkontinuierlicher Form mit den Matrizen A , B , D und E vor, so ist die Überführung in die zeitdiskrete Darstellung nach Gleichungen (4.15) und (4.16) über

$$\bar{A} = (I + TA) \quad (4.24)$$

$$\bar{B} = TB \quad (4.25)$$

$$\bar{D} = D \quad (4.26)$$

$$\bar{E} = E \quad (4.27)$$

direkt zu berechnen.

4.3.2 Implizites Euler-Verfahren

Ebenfalls zu den Einschrittverfahren gehört das implizite oder auch *Rückwärts-Euler-Verfahren*. Die Berechnungsvorschrift lautet

$$T\dot{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n-1). \quad (4.28)$$

Zur Bestimmung des aktuellen Funktionswertes wird also die Steigung zu demselben Zeitpunkt berücksichtigt, wie in Abbildung 4.2(b) veranschaulicht ist. Für den Zustandsraum folgt

$$\dot{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \quad (4.29)$$

$$T(\mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n)) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n-1), \quad (4.30)$$

und schließlich

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(n) = \frac{1}{T}\mathbf{x}(n) - \frac{1}{T}\mathbf{x}(n-1) - \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \quad (4.31)$$

$$\left(\frac{1}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{x}(n) = \frac{1}{T}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n). \quad (4.32)$$

Folglich lautet die diskrete Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}(n) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{x}(n-1) + \left(\frac{1}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(n). \quad (4.33)$$

Das Ausgangssignal wird wieder durch

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{D}\mathbf{x}(n) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) \quad (4.34)$$

berechnet. Das implizite Euler-Verfahren umschließt die gesamte linke Halbebene und ist daher „A-stabil“. Die Diskretisierung eines stabilen, zeitkontinuierlichen Systems resultiert stets in einem ebenfalls stabilen, zeitdiskreten System. Es kommt allerdings zu einer Dämpfung bei hohen Frequenzen. Entsprechend können instabile zeitkontinuierliche Pole durch den Diskretisierungsschritt auf stabile zeitdiskrete Pole abgebildet werden [Yeh09].

Transformationsregeln für das implizite Euler-Verfahren

Die zeitkontinuierliche Darstellung ist durch Anwendung der Gleichungen

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \quad (4.35)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \left(\frac{1}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{B} \quad (4.36)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (4.37)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \quad (4.38)$$

direkt in eine äquivalente zeitdiskrete Darstellung überführbar. Die Zustandsgleichung ist entsprechend Gleichung (4.33) in

$$\mathbf{x}(n) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(n-1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(n) \quad (4.39)$$

abzuändern.

4.3.3 Trapezregel

Die Kombination der beschriebenen Euler-Verfahren führt auf die Trapezregel, ein implizites Einschrittverfahren zweiter Ordnung. Die Berechnungsvorschrift ist

$$\frac{T}{2}(\dot{\mathbf{x}}(n) + \dot{\mathbf{x}}(n-1)) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n-1). \quad (4.40)$$

und berücksichtigt den Mittelwert der Steigungen zu aktuellem und vorangegangenem Zeitschritt. Für die Zustandsraumgleichung bedeutet dies

$$\frac{T}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) + \mathbf{A}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1)) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n-1), \quad (4.41)$$

was, nach Umstellen zu $\mathbf{x}(n)$, auf folgende Zustandsgleichung führt

$$\mathbf{x}(n) = \left(\frac{2}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \left(\left(\frac{2}{T}\mathbf{I} + \mathbf{A}\right)\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1)\right). \quad (4.42)$$

Die Anwendung der Trapezregel auf ein stabiles zeitkontinuierliches System hat ein ebenfalls stabiles zeitdiskretes System zur Folge.

Wie aus Gleichung (4.42) ersichtlich ist, wird bei der Trapezmethode neben vorherigem Zustand $\mathbf{x}(n-1)$ und aktuellem Eingangswert $\mathbf{u}(n)$ auch der vorherige Eingangswert $\mathbf{u}(n-1)$ benötigt.

Kanonisierung

Abhilfe schafft hier eine Neudefinition der Zustände, so dass auch für diese Methode eine kanonische, also minimale Form erreicht werden kann [DHZ10]. Die Zusammenfassung von $\mathbf{u}(n)$ und $\mathbf{x}(n)$ zu einem neuen Zustand $\mathbf{x}_c(n)$ gemäß

$$\mathbf{x}_c(n) = \frac{T}{2} \left(\left(\frac{2}{T}\mathbf{I} + \mathbf{A} \right) \mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \right) \quad (4.43)$$

erlaubt die Definition einer äquivalenten Zustandsgleichung in kanonischer Form,

$$\mathbf{x}_c(n) = \left(\frac{2}{T}\mathbf{I} + \mathbf{A} \right) \left(\frac{2}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{x}_c(n-1) + 2 \left(\frac{2}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(n). \quad (4.44)$$

In gleicher Weise sind auch die Matrizen der Ausgangsgleichung neu zu definieren.

Transformationsregeln für die Trapezregel

Mit den Gleichungen

$$\bar{A} = \left(\frac{2}{T}I + A\right) \left(\frac{2}{T}I - A\right)^{-1} \quad (4.45)$$

$$\bar{B} = 2 \left(\frac{2}{T}I - A\right)^{-1} B \quad (4.46)$$

$$\bar{D} = \frac{2}{T} D \left(\frac{2}{T}I - A\right)^{-1} \quad (4.47)$$

$$\bar{E} = E + D \left(\frac{2}{T}I - A\right)^{-1} B. \quad (4.48)$$

sind die Matrizen der zeitkontinuierlichen Darstellung direkt in die zeitdiskrete Form überführbar. Diese Transformation beinhaltet dabei die Diskretisierung nach der Trapezregel sowie die Kanonisierung in einem Schritt.

Von Vorteil ist, dass die benötigte Matrixinversion in allen Ausdrücken die gleiche Form aufweist und somit in der Praxis lediglich einmal zu berechnen ist.

Eine passende, modifizierte Beschreibung der zeitdiskreten Modellgleichungen wird in [DHZ10] vorgeschlagen. Mit der Formulierung

$$\mathbf{x}_c(n) = \bar{A}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{B}\mathbf{u}(n) \quad (4.49)$$

$$\mathbf{y}(n) = \bar{D}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{E}\mathbf{u}(n) \quad (4.50)$$

liegt dabei ein diskretes Zustandsraummodell mit einheitlichem Zeitbezug vor, das mit den Gleichungen (4.45) bis (4.48) eine praxisgerechte Umsetzung bietet.

4.3.4 Weitere Diskretisierungsmethoden

Neben den vorgestellten Verfahren existieren viele weitere Diskretisierungsverfahren, welche genauere Lösungen bieten, dieses jedoch bei deutlich höherer Rechenkomplexität. Ihr Einsatz in numerischen Simulationswerkzeugen ohne Echtzeitanforderung ist berechtigt, da die Rechenkomplexität nur eine untergeordnete Rolle spielt. Für die Anwendung in Echtzeitsimulationen sind diese jedoch aufgrund der hohen Rechenanforderungen nicht geeignet und sollen in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden.

4.4 Elektronische Netzwerke im Zustandsraum

Die Zustandsraumdarstellung eignet sich besonders für die Beschreibung elektronischer Netzwerke und nimmt aus diesem Grund eine zentrale Rolle

in der Simulation analoger Schaltungen ein, siehe auch Abschnitt 2.4. Die im System zu identifizierenden Energiespeicher liegen in Form von Kondensatoren vor, seltener als Induktivitäten. Gemäß der Definition der Kapazität folgt für einen Kondensator

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \rightarrow i_C = C \cdot \dot{u}_C, \quad (4.51)$$

Strom und Spannung sind also über eine Differentialgleichung miteinander verknüpft. Entsprechend gilt für Induktivitäten

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow u_L = L \cdot \dot{i}_L. \quad (4.52)$$

Gleichungen (4.51) und (4.52) bilden die Grundlage für die Beschreibung im Zustandsraum. Alle Kondensatorspannungen werden zum Zustandsvektor x zusammengefasst, ebenso die Ströme der Induktivitäten. Die weitere Netzwerkanalyse ist dann entsprechend den Kirchhoffschen Sätzen durchzuführen. Die Matrixeinträge in A und B repräsentieren reziproke Zeitkonstanten mit $[s^{-1}]$, die Einträge in D und E sind einheitenlose Größen.

4.5 Betrachtung parametrischer und zeitvarianter Systeme

Bislang wurden alle Betrachtungen stillschweigend nur an linearen zeitinvarianten Systemen vorgenommen. In der Praxis sind viele Systeme jedoch parameterabhängig und somit veränderlich. Bei einer elektronischen Schaltung liegt eine derartige Abhängigkeit beispielsweise vor, wenn einzelne Schaltungselemente in ihrem Wert verändert werden können, wie dies z.B. bei Potentiometern gegeben ist. Werden Teile des System verändert, so ändern sich auch die Einträge der Matrizen A , B , D und E . Die Koeffizienten der zeitdiskreten Matrizen sind dann ebenfalls zu aktualisieren, was je nach gewählter Diskretisierungsmethode eine nicht unerhebliche Rechenzeit erfordert.

Bei den impliziten Verfahren ist eine Matrixinversion durchzuführen um einen neuen Koeffizientensatz zu erhalten. Das vorgestellte Verfahren mit Trapezregel-Diskretisierung und Kanonisierung erfordert dabei die Berechnung nur einer Matrixinversion für alle Matrizen. Dadurch wird der Berechnungsaufwand minimiert und ist auch für veränderliche Systeme akzeptabel.

Relevanz für Echtzeitsysteme

Je nach Anwendungsfall ist zwischen *zeitvarianten* und *parameterabhängigen* Systemen zu unterscheiden, die für diese Arbeit wie folgt definiert werden:

Bei einem zeitvarianten System ist die Veränderung des Systems durch den Benutzer oder eine systemeigene Steuergröße zu jeder Zeit möglich und mit sofortiger Wirkung umzusetzen. Die Zeitvarianz ist ein wichtiger Bestandteil des Systems. In Bezug auf analoge Schaltungen für E-Gitarren sind dieses beispielsweise Geräte mit einem Schwellerpedal, wie das *Wah-Wah*, bei denen die Möglichkeit der ständigen Veränderung einer Potentiometerstellung verlangt wird.

Als parameterabhängige Systeme werden jene Systeme bezeichnet, bei denen eine Änderung nur gelegentlich vorgenommen wird. Vom Aufbau her sind beide Systeme ansonsten identisch. Ein Beispiel dafür wäre die nachfolgend vorgestellte Klangregelung aus einem Gitarrenverstärker mit drei Potentiometern. Der Benutzer kann theoretisch zu jeder Zeit die Potentiometerstellungen verändern, in der Regel ist eine Änderung aber nur in größeren Zeitabständen zu erwarten.

Die Neuberechnung der Koeffizienten kann im Fall eines parameterabhängigen Systems untergeordnet und gegebenenfalls auf viele Zeitschritte ausgedehnt erfolgen. Der Berechnungsaufwand kann damit gestreckt und gleichmäßig verteilt werden. Eine geringfügige Zeitverzögerung ist in den meisten Fällen vom Anwender hinnehmbar. Liegt hingegen ein zeitvariantes System vor, ist die Änderung sofort zu übernehmen, da der Anwender eine Verzögerung als störend empfinden wird.

4.6 Beispiel: Klangregelung

Als Beispiel für ein lineares, parameterabhängiges System soll ein einfaches passives Filter untersucht werden [DHZ10]. Die Schaltung in Abbildung 4.3 dient der Klangregelung mit je einem Potentiometer für Bässe (R_3), Mitten (R_4) und Höhen (R_2) und stammt aus einem klassischen FENDER-Verstärker. Die entsprechenden Bauteilwerte sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Ähnliche passive Netzwerke sind in fast allen Verstärkerdesigns zu finden [Lem78, Zol10]. Typischerweise sitzt ein solcher *Tone Stack* zwischen der Vorverstärker- und der Phasenumkehrstufe, zwei Schaltungsteilen, die an späterer Stelle besprochen werden.

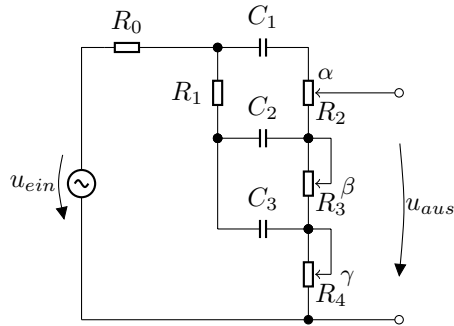


Abbildung 4.3: Fender Klangregelung.

4.6.1 Schaltungsanalyse

Um zum zeitkontinuierlichen Zustandsraummodell zu gelangen, wird zunächst eine Netzwerkanalyse gemäß den Kirchhoffschen Maschen- und Knotenregeln durchgeführt. Wir definieren die erste Masche M_1 mit

$$M_1: 0 = -u_{ein} + u_{R_0} + u_{R_1} + u_{C_3} + u_{R_4}. \quad (4.53)$$

Mit der Definition der Kapazität $i_c = C\dot{u}_c$ können die Spannungen zwischen den Netzwerkknoten durch die Kondensatorströme ausgedrückt werden. Zum Beispiel gilt

$$u_{R_1} = R_1 i_{R_1} = R_1 C_2 \dot{u}_{C_2} + R_1 C_3 \dot{u}_{C_3}. \quad (4.54)$$

Für die erste Maschengleichung ergibt sich

$$\dot{u}_{C_1} R_m C_1 + \dot{u}_{C_2} (R_m + R_1) C_2 + \dot{u}_{C_3} (R_m + R_1) C_3 = -u_{C_3} + u_{ein}, \quad (4.55)$$

Tabelle 4.1: Bauteilwerte des Tone Stack.

R_0	38 k Ω	R_3	250 k Ω	C_2	100 nF
R_1	100 k Ω	R_4	10 k Ω	C_3	47 nF
R_2	250 k Ω	C_1	250 pF		

wobei die Zusammenfassung $R_m = R_0 + \gamma R_4$ genutzt wird. In gleicher Weise werden zwei weitere Maschen gewählt

$$M_2 : 0 = u_{C1} + u_{R2} - u_{C2} - u_{R1} \quad (4.56)$$

$$M_3 : 0 = u_{C2} + u_{R3} - u_{C3}, \quad (4.57)$$

was schließlich zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$\begin{pmatrix} -R_m C_1 & (-R_m - R_1) C_2 & (-R_m - R_1) C_3 \\ -R_2 C_1 & R_1 C_2 & R_1 C_3 \\ \beta R_3 C_1 & \beta R_3 C_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \\ \dot{u}_{C3} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ u_{C3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u_{ein}. \quad (4.58)$$

Der Ausgang ist der Abgriff des Potentiometers R_2 , gesteuert durch den Parameter α . Die Ausgangsspannung u_{aus} lässt sich entsprechend durch

$$u_{aus} = u_{ein} - u_{R0} - u_{C1} - \alpha u_{R2}. \quad (4.59)$$

ausdrücken.

4.6.2 Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell

Auflösen nach $(\dot{u}_{C1} \ \dot{u}_{C2} \ \dot{u}_{C3})^T$ führt auf die Darstellung gemäß Gleichungen (4.5) und (4.6). Da das System lediglich einen Eingang und einen Ausgang hat, können die Eingangs-, Ausgangs- und Durchgangsmatrizen als Vektoren \mathbf{b} , \mathbf{d} bzw. skalare Größe e notiert werden. Die Ordnung des Systems ist $l = 3$. Es ergeben sich die folgenden Vektoren und Matrizen:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{R_x^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R_m + R_1}{C_1} & -\frac{R_m + R_1}{C_1} & \frac{R_1}{C_1} \\ -\frac{R_m + R_1}{C_2} & \frac{R_x^2 + \beta R_3 (R_m + R_1)}{\beta C_2 R_3} & -\frac{R_x^2 + R_1 \beta R_3}{C_2 \beta R_3} \\ \frac{R_1}{C_3} & -\frac{R_x^2 + \beta R_1 R_3}{\beta C_3 R_3} & \frac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_m + \beta R_3)}{\beta C_3 R_3} \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{C_1 R_x^2} \\ -\frac{R_1}{C_2 R_x^2} \\ \frac{R_1 + R_2}{C_3 R_x^2} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{R_x^2} \cdot \begin{pmatrix} -R_x^2 + \alpha R_2 \cdot (R_m + R_1) + R_0 R_1 \\ -\alpha R_2 \cdot (R_m + R_1) - R_0 R_1 \\ R_0 R_1 + R_1 \alpha R_2 + R_0 R_2 \end{pmatrix}^T \quad (4.62)$$

sowie

$$e = -\frac{1}{R_x^2} (R_1 \alpha R_2 + R_0 R_1 + R_0 R_2 - R_x^2), \quad (4.63)$$

wobei die Substitution $R_x^2 = R_0 R_1 + R_0 R_2 + \gamma R_1 R_4 + \gamma R_2 R_4 + R_1 R_2$ aus Gründen der Lesbarkeit genutzt wird. Der Zustandsvektor \mathbf{x} beinhaltet die Spannungen über allen Kondensatoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_{C1} & u_{C2} & u_{C3} \end{pmatrix}^T \quad (4.64)$$

und der Eingangsvektor die erregende Eingangsspannung $u = u_{ein}$.

4.6.3 Eigenschaften des Systems

Der Tone Stack erweist sich als vollständig steuerbar, da die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_C = (\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}) \quad (4.65)$$

nach Gleichung (4.7) den Rang 3 hat, was der Ordnung des Systems entspricht. Des Weiteren ist die Schaltung beobachtbar, da auch die (3×3) -Matrix

$$\mathbf{Q}_O = (\mathbf{D} \ \mathbf{D}\mathbf{A} \ \mathbf{D}\mathbf{A}^2)^T \quad (4.66)$$

die Bedingung des vollen Rangs erfüllt. Da die Schaltung nur eine Ausgangsgröße hat, ist sie ferner auch ausgangssteuerbar. Ebenfalls bestätigt werden kann die Stabilität, die aber bei passiven Netzwerken grundsätzlich gegeben ist. Diese Aussagen gelten für den gesamten Parameterraum.

Als Ausnahme ist der Sonderfall $\beta \rightarrow 0$ anzugeben, α und γ sind dabei beliebig. Für $\beta = 0$ ist die Systemmatrix nicht definiert (Divisor ist Null), entsprechend verliert die Zustandsraumdarstellung ihre Gültigkeit. Eine Erklärung lässt sich leicht anhand des Schaltplans finden. Für $\beta = 0$ ist Potentiometer R_3 kurzgeschlossen, somit liegen die Kondensatoren C_2 und C_3 parallel und sind linear abhängig. Für diesen Sonderfall müsste demzufolge ein Zustandsraummodell mit lediglich $l = 2$ Zuständen aufgestellt werden, worauf an dieser Stelle jedoch verzichtet wird.

4.6.4 Zeitdiskretes Zustandsraummodell

Die äquivalente zeitdiskrete Darstellung ergibt sich aus Anwendung der Gleichungen (4.45) bis (4.48), sofern die Trapezregel genutzt werden soll. Der symbolische Ausdruck ist zu unhandlich um an dieser Stelle abgedruckt zu werden, es lässt sich aber feststellen, dass alle Matrixeinträge von mindestens einem der Parameter α, β oder γ abhängig sind. Wird einer dieser Parameter geändert (eines der Potis verstellt), so müssen sämtliche Matrixeinträge neu berechnet werden.

4.6.5 Ergebnisse

Als Ergebnisse werden hier die Frequenzgänge für verschiedene Parameter ($\alpha|\beta|\gamma$) betrachtet. Einige der Kurven sind in Abbildung 4.4 gezeigt. Die Überprüfung der Ergebnisse erfolgte über die Berechnung nach Gleichung (4.14) sowie mit dem Hilfswerkzeug „Tone Stack calculator“ [Amp10] und bestätigte die Korrektheit der Umsetzung.

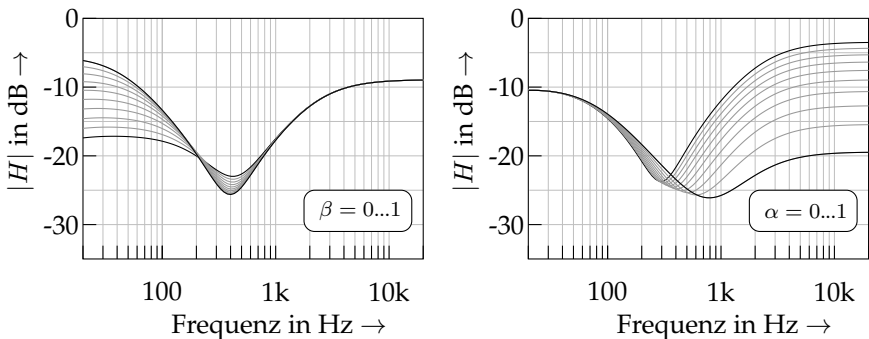


Abbildung 4.4: Betragsfrequenzgänge der Klangregelung für verschiedene Potentiometer-Stellungen.

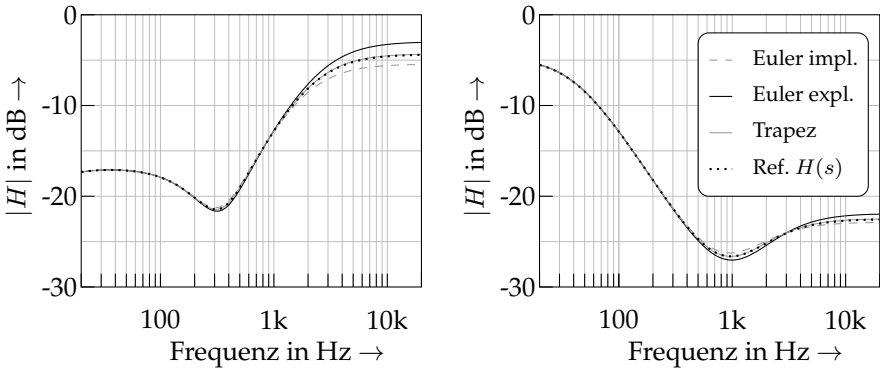


Abbildung 4.5: Vergleich der Diskretisierungsmethoden: Frequenzgänge für $\langle \alpha | \beta | \gamma \rangle = \langle 0,1 | 0,5 | 0,1 \rangle$ (links) und $\langle \alpha | \beta | \gamma \rangle = \langle 0,95 | 0,5 | 0,95 \rangle$ (rechts).

4.7 Gegenüberstellung der Diskretisierungsmethoden

Jeder der vorgestellten Diskretisierungsansätze ist fehlerbehaftet und kann daher nur eine Approximation des zeitkontinuierlichen Systems darstellen. Abweichungen sind dabei im Bereich der hohen Frequenzen zu erwarten, da dort die Schätzung der Euler-Verfahren ungenauer wird. Hinsichtlich des Rechenaufwandes sind die einfachen Eulerverfahren gegenüber der Trapezregel im Vorteil. Neben den Berechnungen von Zustand und Ausgang, die für jeden Abtastwert durchzuführen sind, ist ggf. auch der Aufwand bei Parameteränderung zu berücksichtigen, siehe Abschnitt 4.5.

Für einen Vergleich wird erneut die Beispielschaltung aus Abbildung 4.3 betrachtet. Das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell mit den Matrizen nach den Gleichungen (4.60), (4.61), (4.62) und (4.64) wurde hierzu mit den vorgestellten Methoden diskretisiert. Die sich ergebenden Frequenzgänge zeigt Abbildung 4.5. Die ebenfalls dargestellte Referenzkurve wurde mit Gleichung (4.14) ermittelt.

Zu erkennen ist, dass das explizite Euler-Verfahren zu einer Überhöhung bei hohen Frequenzen führt. Das implizite Euler-Verfahren hingegen verläuft

unterhalb des wahren Frequenzgangs. Hier verursacht die Diskretisierung eine zusätzliche Dämpfung. Die Ergebnisse der Trapezregel decken sich in guter Übereinstimmung mit der Referenz. Diese Beobachtungen werden durch andere Arbeiten bestätigt, z.B. [YAS07, Yeh09]. Es lässt sich daraus folgern, dass das Trapezverfahren zwar den höchsten mathematischen Aufwand benötigt, aber auch die genauesten Ergebnisse der drei Verfahren erzielt.

Alternativ zur Zustandsraumbeschreibung ist die Realisierung als digitales Filter dritter Ordnung möglich, eine Herleitung bietet [YS06]. Die untersuchte Schaltung ist dabei bis auf wenige Feinheiten identisch. Parameteränderungen erfordern eine Neuberechnung der Filterkoeffizienten, die entsprechenden (umfangreichen) Ausdrücke werden in einer symbolischer Form angegeben.

4.8 Zusammenfassung des Kapitels

Das Zustandsraumkonzept ermöglicht die systematische Beschreibung beliebiger physikalischer Systeme und ist insbesondere für die Modellierung analoger Schaltungen geeignet.

Für die Beschreibung linearer Systeme kann die äquivalente Zustandsraumdarstellung direkt aus einer zeitkontinuierlichen Systemanalyse ermittelt werden. Bei einer elektrischen Schaltung ist daher eine gewöhnliche Netzwerkanalyse durchzuführen. Der Übergang zu einem diskreten Modell erfolgt über einen Diskretisierungsschritt, welcher in der Regel auf den numerischen Integrationsansätzen nach Euler (implizite oder explizite Form) oder der daraus abgeleiteten Trapezregel basiert. Die Trapezregel ist den einfacheren Euler-Verfahren vorzuziehen, da sie bei vertretbarem Rechenaufwand die größte Genauigkeit bietet.

5

Nichtlineare Systeme im Zustandsraum

Auch die Beschreibung nichtlinearer Systeme ist mit der Zustandsraumdarstellung möglich. Die gute Eignung für die echtzeitfähige Simulation nichtlinearer elektrischer Netzwerke wird in [Yeh09, YAS10, Yeh12] dargelegt. Die dort vorgestellte DK-Methode (für *Diskrete Kirchhoff*-Methode) wurde von Yeh und Kollegen entwickelt und explizit für die Simulation von Gitarrenverstärkern und -verzerrern vorgeschlagen.

Der in diesem Kapitel genutzte Formalismus zur Beschreibung nichtlinearer Schaltungen lehnt sich in Teilen an diesen Ansatz an. Aus didaktischen Gründen folgt jedoch zunächst die Beschreibung im zeitkontinuierlichen Zustandsraum. Die DK-Methode selbst wird erst in Abschnitt 5.6 besprochen.

5.1 Zeitkontinuierliche Beschreibung

Der allgemeine Zustandsraum nach Gleichungen (4.5) und (4.6) ist nur für die Beschreibung linearer Systeme geeignet. Für nichtlineare Systeme bietet sich die Erweiterung zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{i}(\mathbf{v}) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{i}(\mathbf{v}) \quad (5.2)$$

an [Yeh09, DHZ10]. Die folgenden Ausführungen seien o. B. d. A. auf die Beschreibung von elektronischen Schaltungen beschränkt. Die in Kapitel 4 eingeführten Zuordnungen für Ströme und Spannungen in einem Netzwerk behalten ihre Gültigkeit. Vektor \mathbf{i} fasst alle Ströme zusammen, welche durch die nichtlinearen Bauteile fließen. Er wird fortan als *nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung* bezeichnet. Entsprechend drücken die Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{F} aus, wel-

chen Beitrag jene Ströme zur Zustands- bzw. Ausgangsgleichung liefern. Mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{i}(\mathbf{v}) \quad (5.3)$$

ist eine weitere Gleichung zu definieren. Diese stellt den Zusammenhang zwischen den Klemmenspannungen \mathbf{v} und den Strömen $\mathbf{i}(\mathbf{v})$ an den nichtlinearen Elementen her und wird hier *lineare Strom-Spannungs-Beziehung* genannt.

Die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung enthält alle Ströme die durch die nichtlinearen Schaltungselemente fließen. An einem Schaltungselement mit N Anschlüssen sind $(N - 1)$ Ströme zu definieren, zum Beispiel ist ein Transistor als dreipoliges Bauteil vollständig durch zwei Ströme bestimmt (Kirchhoffsche Knotenregel). Weiterhin sind an dem Schaltungselement $N - 1$ unabhängige Spannungen festzulegen (Kirchhoffsche Maschenregel). Vektor \mathbf{v} weist also stets dieselbe Ordnung wie \mathbf{i} auf, Matrix \mathbf{K} ist daher quadratisch. Die Anzahl q der benötigten Einträge in \mathbf{i} wird im weiteren Verlauf als *Ordnung der Nichtlinearität* bezeichnet.

Gleichung (5.3) ist implizit, da die sich einstellenden Ströme von den Klemmenspannungen abhängen und somit eine Funktion von \mathbf{v} sind. Das Blockdiagramm in Abbildung 5.1 veranschaulicht den erweiterten Zustandsraum.

Interpretation

Die Vorteile der gewählten Systembeschreibung sind die Interpretierbarkeit sowie die übersichtliche und logische Notation. Wird \mathbf{i} zu Null gesetzt, ergibt sich wieder ein lineares System. Aus elektronischer Sicht ist dies gleichbedeutend mit dem Ersetzen sämtlicher nichtlinearer Elemente durch Leerläufe.

5.2 Zeitdiskrete Beschreibung

Die zeitdiskrete Beschreibung ist analog zu den Gleichungen (4.49) und (4.50) anzugeben mit

$$\mathbf{x}_c(n) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(n) + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{i}(\mathbf{v}(n)) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{y}(n) = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{\mathbf{E}}\mathbf{u}(n) + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{i}(\mathbf{v}(n)) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{v}(n) = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{u}(n) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{i}(\mathbf{v}(n)). \quad (5.6)$$

Die Transformation des zeitkontinuierlichen Modells in ein zeitdiskretes erfolgt in der gleichen Weise wie beim linearen Modell. Für eine Diskretisierung

nach der Trapezregel behalten die Gleichungen (4.45) bis (4.48) ihre Gültigkeit. Des Weiteren gilt

$$\bar{C} = 2 \left(\frac{2}{T} I - A \right)^{-1} C \quad (5.7)$$

$$\bar{F} = F + D \left(\frac{2}{T} I - A \right)^{-1} C \quad (5.8)$$

$$\bar{G} = \frac{2}{T} G \left(\frac{2}{T} I - A \right)^{-1} \quad (5.9)$$

$$\bar{H} = H + G \left(\frac{2}{T} I - A \right)^{-1} B \quad (5.10)$$

$$\bar{K} = K + G \left(\frac{2}{T} I - A \right)^{-1} C. \quad (5.11)$$

Die Berechnungsvorschriften für eine Diskretisierung nach den Euler-Verfahren sind auf gleichem Wege leicht zu ermitteln.

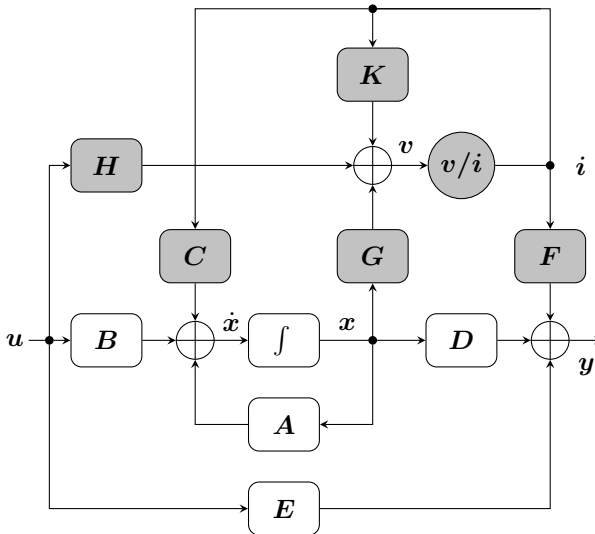


Abbildung 5.1: Grafische Veranschaulichung des erweiterten Zustandsraummodells.

5.3 Berechnung der nichtlinearen Strom-Spannungs-Beziehung

Der Term $\mathbf{i}(\mathbf{v}(n))$ stellt die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung dar und ist als die mathematische Beschreibung der Ströme aller nichtlinearen Schaltungselemente in Abhängigkeit ihrer Klemmenspannungen aufzufassen. Die Beschreibung ist grundsätzlich gedächtnislos und daher statisch. Ist die Angabe eines mathematischen Ausdrucks nicht möglich, so kann alternativ auch eine tabellierte Strom-Spannungs-Beziehung genutzt werden.

5.4 Berechnung der linearen Strom-Spannungs-Beziehung

Gleichung (5.6) lässt sich aufteilen in einen Teil $\mathbf{p}(n)$, der nur von Zuständen und Eingängen abhängt, sowie einen Teil $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{i}(\mathbf{v}(n))$, der die Rückwirkung der Ströme auf $\mathbf{v}(n)$ zum Ausdruck bringt

$$\mathbf{v}(n) = \underbrace{\bar{\mathbf{G}}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{u}(n)}_{\mathbf{p}(n)} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{i}(\mathbf{v}(n)). \quad (5.12)$$

Gleichung (5.12) führt dabei auf ein Nullstellenproblem. Ist eine Lösung gefunden, wird diese in Form des Vektors \mathbf{i} in die Zustandsgleichung (5.4) sowie in die Ausgangsgleichung (5.5) eingesetzt. Erst dann können Ausgangswert und neue Zustände berechnet werden. Abbildung 5.2 illustriert die notwendigen Schritte.

Das Problem der impliziten Beziehung zwischen Strömen und Spannungen, wie es in Gleichung (5.12) vorliegt, tritt in allen schaltungsorientierten Simulationsverfahren auf [YAS10, MS10, CH10, DHZ10, HZ11] und ist zunächst unabhängig von der gewählten Methode zu betrachten. Als Realisierungen innerhalb einer Echtzeitumgebung kommen mehrere Ansätze in Betracht, die im Folgenden untersucht werden sollen.

5.4.1 Vorberechnung und Tabellierung

Aus Gleichung (5.12) ergibt sich das Nullstellenproblem

$$\mathbf{p}(n) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{i}(\mathbf{v}(n)) - \mathbf{v}(n) = 0, \quad (5.13)$$

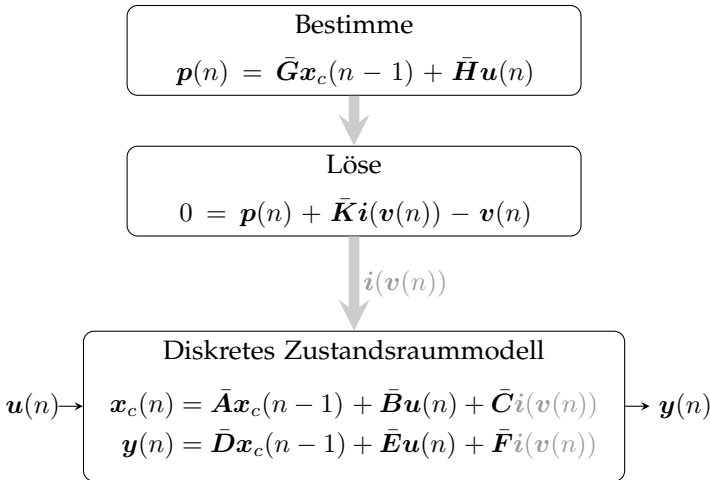


Abbildung 5.2: Berechnungsvorschrift für die nichtlineare Gleichung.

wobei $\bar{K}i(v(n))$ keine Abhängigkeit von den Zuständen oder Eingängen des Systems enthält. Im Gegensatz dazu fasst $p(n)$ alle Beiträge von Zuständen und Eingängen zusammen, ist aber von der Nichtlinearität abgekoppelt.

Dies lässt sich wie folgt interpretieren: Vektor $p(n)$ gibt die Klemmenspannungen über den Nichtlinearitäten wieder, wenn diese leerlaufen, also wirkungslos sind. Vektor $v(n)$ hingegen gibt die Klemmenspannungen bei wirkender Nichtlinearität an.

Mit dieser Erkenntnis ist es möglich, alle sinnvollen Lösungen zu Gleichung (5.12) vorab zu berechnen und diese in numerischer Form abzulegen. Eine solche Tabelle kann in der Form $v(p(n))$ oder $i(p(n))$ organisiert werden. Diese Zuordnung ist eindeutig, statisch und in ihrem Wertebereich klar definierbar. Zur Laufzeit der Simulation ist dann lediglich ein Nachschlagen in der Tabelle erforderlich, um für einen vorgegebenen Wert $p(n)$ die entsprechende Lösung $i(n)$ zu erhalten.

Zu beachten ist, dass eine stetige Funktion quantisiert werden muss und nur als endliche Anzahl diskreter Werte erfasst wird. Aus diesem Grund ist zusätzlich zum Tabellenaufruf eine geeignete Interpolation zu wählen, um die korrekte Lösung zu rekonstruieren.

Als Vorteil bei der Vorberechnung und Tabellierung ist der Rechenaufwand zu nennen. Ist die Tabelle fein genug aufgelöst, reicht die Anwendung einer linearen Interpolation vollkommen aus, um eine gute Näherung der Nullstellen zu erzielen. Bei geschickter Organisation der Tabelle sind dann neben zwei Speicherzugriffen lediglich wenige Multiplikationen und Additionen durchzuführen. Von Vorteil ist ferner, dass die Berechnungszeit unabhängig von der Funktion und somit konstant ist. Nachteilig hingegen wirkt sich der Speicherbedarf für die tabellierte Lösungen aus, der mit der Ordnung der Nichtlinearität q exponentiell anwächst. Die Exaktheit der Lösung ist direkt von der Größe der Tabelle und somit vom benötigten Speicherplatz abhängig. Der benötigte Speicherplatz errechnet sich bei gleichförmiger Rasterung jeder Dimension in M Werte zu M^q Einträgen pro Ordnung, also auf insgesamt $q \cdot M^q$ Einträge.

Hierzu zwei Zahlenbeispiele: Eine Schaltung enthalte eine einfache Diode und somit in der erweiterten Zustandsraumdarstellung eine Nichtlinearität der Ordnung $q = 1$. Für die Zuordnung $i(p(n))$ kann eine Tabelle mit 64 Einträgen bereits vollkommen ausreichend sein. Eine andere Schaltung beinhalte zwei Transistoren und somit eine Nichtlinearität der Ordnung $q = 4$, die Tabelle ist folglich vierdimensional. Bei gleich feiner Auflösung der Tabelle ergibt sich ein Bedarf an $4 \cdot 64^4$ Speicherstellen. Bei Verwendung einfacher Gleitkommazahlen (single precision) bedeutet das bereits eine Tabellengröße von 64 MB. Weitere Zahlenbeispiele zum Thema Speicherbedarf und Rechenkomplexität bei Tabellierung werden in [Yeh12] diskutiert.

5.4.2 Lösen der Gleichung zur Laufzeit

Sind parametrische Schaltungselemente wie z.B. Potentiometer in der Schaltung enthalten, so kann \vec{K} von diesen abhängen. Mit einer geeigneten Quantisierung der parametrischen Bauelemente ist im einfachsten Fall ($q = 1$) von einer Kennlinienschar auszugehen. Für jede Potentiometerstellung ist eine zugeordnete Kennlinie festzulegen. Bei Nichtlinearitäten höherer Ordnung ist der Speicherbedarf mit der Anzahl der Einstellungen zu multiplizieren. Ist die tabellierte Lösung bislang ein akzeptabler Ansatz gewesen, so sind bei parametrischen Schaltungen schnell enorme Speicheranforderungen zu bewältigen¹.

¹ Bei dieser Überlegung wird eine „direkte“, unbedarfte Vorgehensweise angenommen. Je nach Problemstellung sind auch bei parametrischen Systemen Vereinfachungen möglich, die deutliche Speicher-Einsparungen erzielen. Das grundsätzliche Problem bleibt jedoch bestehen.

Eine Alternative ist das Lösen von Gleichung (5.13) zur Laufzeit. Die Lösung wird mit iterativen Lösungsverfahren im Abtasttakt für jeden Wert $p(n)$ neu berechnet. Der Speicherbedarf ist dann Null, stattdessen werden jedoch hohe bis sehr hohe Rechenanforderungen an die CPU bzw. den Signalprozessor gestellt.

Bisektion

Im einfachsten Fall einer Nichtlinearität mit $q = 1$ sind $v(n)$, $i(n)$ und \bar{K} skalare Größen, die Zuordnung $i(p(n))$ eine eindimensionale Kennlinie. Das Nullstellenproblem

$$p(n) + \bar{K}i(v(n)) - v(n) = 0 \quad (5.14)$$

lässt sich dann mit dem Bisektions- oder Halbierungsverfahren lösen, die Stetigkeit der Funktion ist dabei vorausgesetzt. Die Bisektion ist der einfachste Vertreter der Gruppe der *Einschlussverfahren*. Diese setzen die Vorgabe eines Intervalls voraus, welches die gesuchte Nullstelle sicher einschließt.

Im ersten Schritt ist dieses Startintervall $f : [a, b]$ festzulegen. Die Funktion f muss dabei an den Intervallgrenzen ausgewertet unterschiedliche Vorzeichen haben, so dass gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ist dies der Fall, so ist die Existenz einer Nullstelle im Intervall sicher und die Konvergenz des Verfahrens garantiert. Im nächsten Schritt wird das Intervall mit $c = \frac{1}{2}(a + b)$ halbiert und der Funktionswert an der Intervallhälfte $f(c)$ bestimmt. Anhand des Vorzeichens ist eindeutig zu ermitteln, in welcher Intervallhälfte $[a, c]$ oder $[c, b]$ die Nullstelle liegt. Dieser Vorgang ist solange zu wiederholen, bis die Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit lokalisiert ist.

Das Bisektionsverfahren zeichnet sich durch eine garantierte Lösung aus, konvergiert allerdings linear und somit sehr langsam. Darüber hinaus ist es nicht auf Nichtlinearitäten höherer Ordnung erweiterbar und kann daher nur in einfachen Fällen angewendet werden. Neben dem hier vorgestellten Grundalgorithmus existieren viele verwandte Einschlussverfahren mit verbessertem Konvergenzverhalten, z.B. die *Regula-falsi*, das *Illinois*- oder das *Pegasus*-Verfahren [EMNW05]. Die Beschränkung auf eindimensionale Probleme bleibt bestehen.

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren stellt den sicherlich bekanntesten iterativen Nullstellenlöser dar. Nachteilig gegenüber der einfachen Bisektion ist, dass die erste

Ableitung der Funktion bekannt sein muss. Dafür konvergiert das Verfahren schneller und ist nicht auf eindimensionale Probleme beschränkt.

Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ ist der Algorithmus beschrieben durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (5.15)$$

mit dem Iterationsindex k . Im ersten Schritt werden zu einem Startwert x_k Funktionswert und Steigung (erste Ableitung) bestimmt. Es folgt eine Linearisierung in diesem Punkt, dazu wird die Funktion durch die Tangente $t(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ in diesem Punkt angenähert. Die Nullstelle der Tangente dient als verbesserte Näherung der Nullstelle der Funktion, $0 = t(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Durch Umstellen dieses Ausdrucks ergibt sich unmittelbar die Iterationsvorschrift aus Gleichung (5.15). Mit der gefundenen, verbesserten Lösung wird das Verfahren erneut ausgewertet.

Bei geeignetem Startwert konvergiert das Newton-Verfahren zügig und innerhalb weniger Durchläufe gegen die gesuchte Nullstelle. Die Erweiterung zur Ordnung q führt auf

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_k), \quad (5.16)$$

wobei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_q), \dots, f_q(x_1, \dots, x_q))$ das System der Gleichungen und \mathbf{J} die Jacobi-Matrix mit sämtlichen Ableitungen erster Ordnung ist. Angewendet auf die Problemstellung aus Gleichung (5.13) ergibt sich

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{p} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v} \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Die Jacobi-Matrix \mathbf{J} , bezogen auf die Funktion in Gleichung (5.17), lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{p} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v}) \\ &= \bar{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \mathbf{v}} - \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Neben dem vorgestellten Verfahren finden auch modifizierte Löser Anwendung, bei denen die Jacobi-Matrix geschätzt oder mit einem niedrigeren Zeittakt neu berechnet wird. Der Berechnungsaufwand wird mit dieser Maßnahme weiter verringert.

Das Newton-Verfahren konvergiert *lokal quadratisch*, d.h. die Anzahl der gültigen Stellen verdoppelt sich in etwa mit jeder Newton-Iteration. Von

Bedeutung ist der Zusatz *lokal*, denn für eine gesicherte Konvergenz muss der Startpunkt bereits in der Nähe der Nullstelle liegen. Bei ungünstigem Startwert ist die Konvergenz nicht garantiert, Oszillationen oder Divergenz sind mögliche Folgen.

Gedämpftes Newton-Verfahren

Das gewöhnliche Newton-Verfahren ist wenig erfolgreich bei Problemen höherer Ordnung. Eine bessere Konvergenz verspricht die *gedämpfte* Variante des Algorithmus. Gleichung (5.16) ist dabei um einen zusätzlichen Faktor λ_k zu erweitern, so dass gilt

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_k). \quad (5.19)$$

Faktor λ_k steuert die Schrittweite in Richtung $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$, dabei gilt $0 \leq \lambda_k \leq 1$. Eine neue Lösung wird nur dann akzeptiert, wenn sich der Fehler der euklidischen Norm gemäß

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})\| < \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \quad (5.20)$$

verbessert. Erfüllt die neue Lösung die Forderung nicht, wird der Schrittweitenfaktor solange halbiert, bis eine Lösung akzeptiert werden kann. Mit der Übernahme einer neuen Lösung wird die Schrittweite wieder auf $\lambda_k = 1$ zurückgesetzt.

Für weitere Informationen zu den vorgestellten Grundalgorithmen und deren Varianten sei auf Bücher über Numerik oder mathematische Grundlagenwerke verwiesen, z.B. [EMNW05, Kel03].

5.4.3 Gegenüberstellung der Realisierungen

Neben den vorgestellten Lösern existieren viele weitere numerische Verfahren, die eine Konvergenz mit verringerter Anzahl an Iterationen versprechen. Die einzelnen Schritte sind dann jedoch komplexer, so dass der Berechnungsaufwand insgesamt gleich bleibt oder sogar steigt. Bei mehrdimensionalen Problemen bietet das gedämpfte Newtonverfahren das beste Konvergenzverhalten und ist daher für den Einsatz in einer Echtzeitumgebung vorzuziehen.

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens und seiner Varianten ist in hohem Maße von der Wahl des Startwertes abhängig. Ist dieser sinnvoll gewählt (also bereits nahe der Nullstelle), lassen sich viele Iterationsschritte einsparen. Als

einfacher, aber durchaus praktikabler Startpunkt hat sich dabei die Beibehaltung des letzten Wertes erwiesen.

Die Tatsache, dass die Wahl des richtigen Startwertes eine schnelle Lösung hervorbringt, führt zur vielversprechenden Kombination von Vorberechnung und Lösung zur Laufzeit. Eine lediglich grob aufgelöste Tabelle dient dem Finden eines geeigneten Startwertes, der anschließend einem gedämpften Newton-Löser übergeben wird und innerhalb weniger Iterationen zur exakten Nullstelle führt. Mit einem solchen Hybridverfahren konnten gute Ergebnisse erzielt werden.

5.5 Beispiel: Diodenbegrenztes RC-Filter

Als Beispiel für eine nichtlineare Schaltung wird hier ein einfaches RC-Filter mit nachgeschalteten Dioden betrachtet. Den Schaltplan zeigt Abbildung 5.3, die Bauteilwerte Tabelle 5.1. Der vordere Schaltungsteil stellt ein Bandpassfilter dar und wird auch als *Wien-Glied* bezeichnet. Der hintere Teil ist als *Dioden-Clipper* bekannt. Diodennetzwerke in dieser Form werden zur Begrenzung von Signalen eingesetzt. Dies geschieht entweder, um Schaltungsteile vor zu hohen Spannungen zu schützen, oder aber wie in dieser Schaltung beabsichtigt, um eine Verzerrung des Signals zu erzielen. Vergleichbare Netzwerke sind daher häufig in Gitarrenverzerrern zu finden. [YAS07] bietet eine detaillierte Auseinandersetzung mit einer sehr ähnlichen Schaltung.

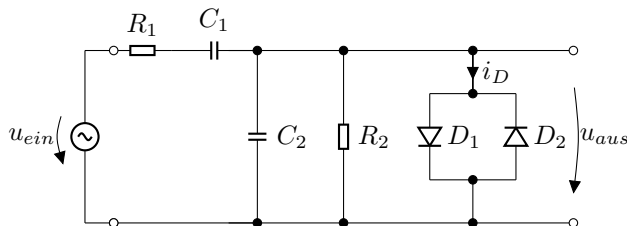


Abbildung 5.3: Diodenbegrenzte RC-Filterschaltung.

Tabelle 5.1: Bauteilwerte des diodenbegrenzten RC-Filters.

R_1	5 k Ω	C_1	100 nF	I_S	2,52 nA
R_2	100 k Ω	C_2	10 nF	ηU_t	45,5 mV

5.5.1 Schaltungsanalyse und zeitkontinuierliches Zustandsraummodell

Die Schaltungsanalyse ist anfangs wie bei einer linearen Schaltung durchzuführen. Zunächst seien die Dioden D_1 und D_2 unbeachtet.

Das Filter hat mit den Kondensatoren C_1 und C_2 zwei Energiespeicher, daher muss die Zustandsraumdarstellung die Ordnung $l = 2$ aufweisen. Eine Netzwerkanalyse führt auf die zwei Maschen

$$M_1 : 0 = -u_{ein} + u_{R1} + u_{C1} + u_{C2} \quad (5.21)$$

$$M_2 : 0 = -u_{C2} + u_{R2}, \quad (5.22)$$

welche den linearen Teil der Schaltung vollständig beschreiben. Werden die Spannungsabfälle an den Widerständen durch die Kondensatorströme ausgedrückt, ergibt sich

$$M_1 : 0 = -u_{ein} + R_1 C_1 \dot{u}_{C1} + u_{C1} + u_{C2} \quad (5.23)$$

$$M_2 : 0 = u_{C2} - R_2 (C_1 \dot{u}_{C1} - C_2 \dot{u}_{C2}). \quad (5.24)$$

Das entsprechende Zustandsraummodell in vektorieller Notation lautet dann

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{R_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{R_1+R_2}{C_2 R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{R_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} u_{ein}. \quad (5.25)$$

Die Ausgangsspannung ist identisch mit der Spannung über dem Kondensator C_2 . Für die Ausgangsgleichung folgt

$$y = u_{aus} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u_{ein}. \quad (5.26)$$

Mit dem nächsten Schritt werden die Dioden in die Überlegungen einbezogen. Masche M_1 erfährt durch das Hinzufügen der Dioden keine Änderung, in Maschengleichung M_2 ist nun jedoch der Stromfluß durch D_1 und D_2 zu

berücksichtigen. Beide Ströme werden dabei zusammengefasst zu i_D , wie es im Schaltplan eingetragen ist. Gleichung (5.24) ist dann abzuändern in

$$M_2: 0 = u_{C2} - R_2(C_1 \dot{u}_{C1} - C_2 \dot{u}_{C2} - i_D). \quad (5.27)$$

Das Zustandsraummodell, entsprechend den Gleichungen (5.1) und (5.2), lautet folglich

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & \frac{R_1 + R_2}{R_1 C_2 R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} \end{pmatrix} u_{ein} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_2} \end{pmatrix} i_D \quad (5.28)$$

$$u_{aus} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_{ein} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} i_D \quad (5.29)$$

und für die lineare Strom-Spannungs-Beziehung nach Gleichung (5.3)

$$U_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_{ein} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} i_D. \quad (5.30)$$

5.5.2 Definition der Nichtlinearität

Neben diesen drei Gleichungen ist noch die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung der nichtlinearen Bauteile, in diesem Fall also der beiden Dioden, zu definieren. Für eine Diode mit Vorwärtsspannung U_D errechnet sich der Strom i_D mit der Shockley-Gleichung allgemein zu

$$i_D(U_D) = I_S \left(\exp \left(\frac{U_D}{\eta U_t} \right) - 1 \right). \quad (5.31)$$

Dabei ist I_S der Sättigungssperrstrom, U_t die Temperaturspannung und η der Emissionskoeffizient. In der zu untersuchenden Schaltung liegt eine Antiparallelschaltung der zwei Dioden vor, wobei die Spannung über den Elementen gleich der Spannung über C_2 ist. Es folgt

$$i(\mathbf{v}) = i_D(u_{C2}) = I_{S1} \left(\exp \left(\frac{u_{C2}}{\eta_1 U_t} \right) - 1 \right) - I_{S2} \left(\exp \left(\frac{-u_{C2}}{\eta_2 U_t} \right) - 1 \right). \quad (5.32)$$

Mit der Annahme, dass beide Dioden identische Kennlinienparameter aufweisen, kann dieser Ausdruck zusammengefasst werden zu

$$i_D(u_{C2}) = 2I_S \sinh \left(\frac{u_{C2}}{\eta U_t} \right). \quad (5.33)$$

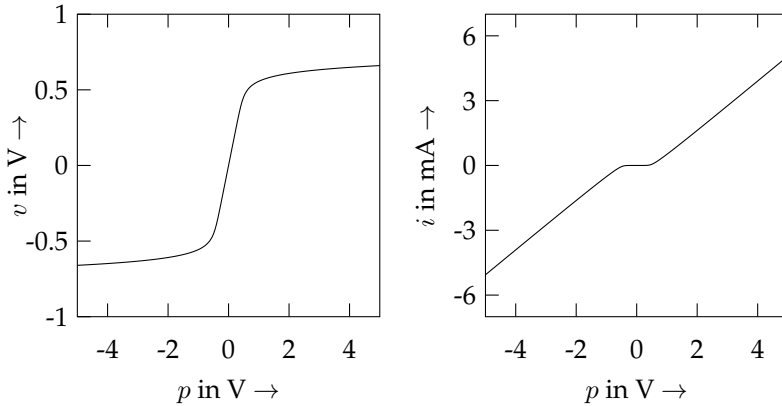


Abbildung 5.4: Tabellierte Nichtlinearität des diodenbegrenzten RC-Filters.

5.5.3 Lösen der nichtlinearen Gleichung

Nach Diskretisierung des Zustandsraummodells unter Zuhilfenahme der Gleichungen (4.45) bis (4.48) sowie (5.7) bis (5.11) liegt die lineare Strom-Spannungs-Beziehung nach Gleichung (5.13) vor als

$$p + \bar{K} \cdot \left(2I_S \sinh \left(\frac{v}{\eta U_t} \right) \right) - v = 0. \quad (5.34)$$

Der Zeitbezug kann an dieser Stelle aufgehoben werden, da er für die Lösung selbst ohne Bedeutung ist.

5.5.3.1 Tabellierte Lösung

Da die Nichtlinearität lediglich eindimensional ist, stellt die Vorberechnung und Tabellierung der Lösung eine geeignete Realisierung dar. Problematisch ist dabei einzig die Vorgabe des zulässigen Wertebereichs der Größe p (in Volt), welcher passend zur Anwendung zu wählen ist. Abbildung 5.4 zeigt die beiden vorgestellten Möglichkeiten $v(p)$ und $i(p)$. Der zulässige Wertebereich ist für dieses Beispiel auf $\max |p| = 5 \text{ V}$ festgelegt.

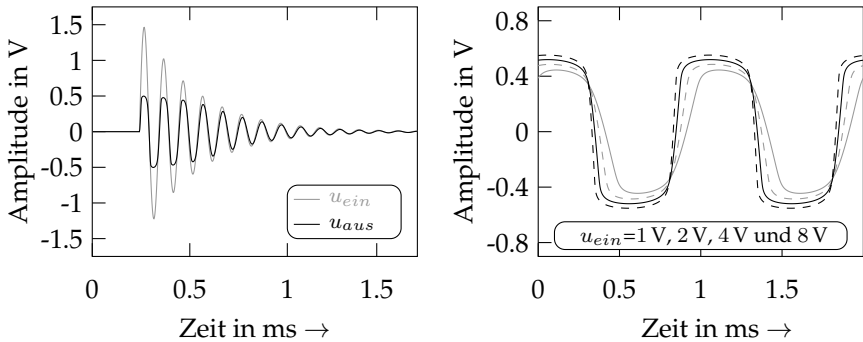


Abbildung 5.5: Ein- und Ausgangssignal der Schaltung bei Anregung mit einem 1,5 V Sinus-Burst (links) und Ausgangssignale bei Anregung mit Sinussignalen verschiedener Amplitude (rechts).

5.5.3.2 Lösung zur Laufzeit

Das Lösen der Gleichung (5.34) zur Laufzeit stellt keine Schwierigkeit dar und kann mit allen vorgestellten Verfahren durchgeführt werden. Hinsichtlich der guten Konvergenzeigenschaften bietet sich jedoch das Newton-Verfahren in gedämpfter Form an. Die Vorgabe eines zulässigen Wertebereichs ist dabei nicht notwendig.

5.5.4 Ergebnisse

In Abbildung 5.5 sind einige Zeitsignale der vorgestellten Schaltung dargestellt. Deutlich erkennbar sind die Begrenzung bzw. Verzerrung der Ausgangsspannung, sowie das dynamische Verhalten durch die Kondensatoren. SPICE-Simulationen führen auf identische Ergebnisse und bestätigen die Korrektheit der Ausführung.

5.6 Alternativer Ansatz: DK Methode

Bei der Modellierung nach Kapitel 5.1 und Kapitel 5.2 wird die Schaltung zunächst als zeitkontinuierliches System analysiert und dann im zeitkontinuier-

lichen Zustandsraum beschrieben. Anschließend erfolgt eine Diskretisierung, bei der das gesamte Zustandsraummodell in ein äquivalentes digitales Modell überführt wird.

Ein anderer Ansatz wird bei der *Diskreten Kirchhoff*-Methode nach Yeh verfolgt [Yeh09, YAS10, Yeh12]. Alle Energiespeicher werden, jeder für sich, zu Beginn diskretisiert. Das entsprechende Zustandsraummodell wird dann direkt in einer zeitdiskreten Form aufgestellt.

5.6.1 Diskretisierung

Die Diskretisierung der reaktiven Einzelkomponenten beruht auf den bereits bekannten Diskretisierungsmethoden. Der Diskretisierungsschritt lässt sich als ein Austausch der Energiespeicher durch Ersatzmodelle interpretieren [McC87]. Unter Anwendung der Trapezregel besteht das Ersatzmodell für einen Kondensator aus einem diskreten Leitwert G_C und einer Stromquelle, die den Strom des vorangegangenen Zeitschritts $i_C(n-1)$ führt. Abbildung 5.6 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Das Ersatzmodell für eine Induktivität hat dieselbe Struktur, die Stromquelle hat jedoch eine entgegengesetzte Polarität. Neben der Trapezregel sind auch alle anderen Diskretisierungsansätze möglich (siehe hierzu z.B. [McC87]), in der Beschreibung der DK-Methode wird jedoch ebenfalls die Trapezregel empfohlen.

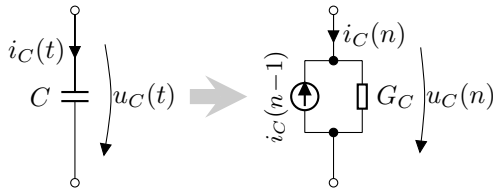


Abbildung 5.6: Trapezregel-Ersatzmodell eines Kondensators.

5.6.2 Schaltungsanalyse

Für die Schaltungsanalyse verwendet Yeh eine Kombination aus dem bereits vorgestellten modifizierten Knotenpotentialverfahren (Abschnitt 2.3.4) und der K-Methode, einer nichtlinearen Filterbeschreibung, die ursprünglich aus der musikalischen Akustik stammt [BPR00]. Die Berechnung erfolgt konsequent mit zeitdiskreten Größen.

Nachdem im Schaltplan alle Energiespeicher durch ihre Ersatzmodelle ausgetauscht sind, wird die Knotenpotentialanalyse in modifizierter Form, ähnlich Gleichung (2.10), durchgeführt. Auf der linken Seite stehen auch in diesem Fall die Leitwertmatrix \mathbf{G} sowie der Vektor $\mathbf{U}(n)$, der sämtliche Knotenpotentiale sowie die Ströme der idealen Spannungsquellen zusammenfasst. Anstelle des Quellenvektors $\mathbf{I}(n)$ erfolgt auf der rechten Seite eine Aufteilung in drei Komponenten,

$$\mathbf{G}\mathbf{U}(n) = \mathbf{M}_1\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{M}_2\mathbf{u}(n) + \mathbf{M}_3\mathbf{i}(n). \quad (5.35)$$

Es sind

- $\mathbf{M}_1\mathbf{x}(n-1)$ die Beiträge der Energiespeicher gemäß den Ersatzmodellen,
- $\mathbf{M}_2\mathbf{u}(n)$ die Beiträge der Eingänge (Signal- und Spannungsquellen),
- $\mathbf{M}_3\mathbf{i}(n)$ die Beiträge jener Ströme, welche aus den nichtlinearen Elementen resultieren.

Alle Einträge in den Matrizen \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 sind dabei Zuweisungen der Form 1, -1 oder 0. Vektor $\mathbf{x}(n)$ beinhaltet alle Systemzustände, die im Falle von Kondensatoren als äquivalente Stromquellen $i_C(n)$ zu deuten sind. Die Vektoren $\mathbf{u}(n)$ und $\mathbf{i}(n)$ enthalten die Werte der Eingänge bzw. der Ströme durch Nichtlinearitäten, ausgewertet zum Zeitschritt n .

5.6.3 Zustandsaktualisierung

Im nächsten Schritt ist die Aktualisierungsvorschrift für die Zustände zu definieren. Der Zustand x eines einzelnen Elements verhält sich allgemein nach

$$x(n) = g \cdot u(n) + s \cdot x(n-1), \quad (5.36)$$

wobei s die Richtung der Ersatzquelle und g ein Leitwert abhängig von der Diskretisierungsregel ist. Beispielsweise gilt für eine Kapazität mit Leitwert $g = 2G_c = \frac{4C}{T}$ und Wirkrichtung $s = -1$ (Stromquelle ist entgegengesetzt) die Vorschrift $i_C(n) = g \cdot u_C(n) + s \cdot i_C(n-1)$. Bei Berücksichtigung aller im System enthaltenen Energiespeicher ergibt sich das Gleichungssystem

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{G}_e\mathbf{U}_e(n) + \mathbf{S}\mathbf{x}(n-1). \quad (5.37)$$

Dabei stellt $\mathbf{U}_e(n)$ die Verknüpfung mit den Knotenpaaren der Energiespeicher her, \mathbf{G}_e ist eine Diagonalmatrix mit den zugehörigen Leitwerten. Die Diagonalmatrix \mathbf{S} enthält, entsprechend Gleichung (5.36), für jeden Kondensator einen Eintrag -1 und für jede Induktivität einen Eintrag 1.

5.6.4 Zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung

Schließlich lässt sich das zeitdiskrete Zustandsraummodell in der bereits diskutierten, erweiterten Form aufstellen (vergleiche Abschnitt 5.2). Es gilt

$$\mathbf{x}(n) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_c(n-1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(n) + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{i}(v(n)), \quad (5.38)$$

wobei die Matrizen $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ und $\bar{\mathbf{C}}$ nach der folgenden Vorschrift zu bilden sind:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{G}_e \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}_1 + \mathbf{S}, \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{G}_e \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}_2, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{G}_e \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}_3. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die Ordnung des Zustandsraums entspricht der Anzahl der unabhängigen Energiespeicher und ist daher identisch mit der Beschreibung nach Gleichung 5.4. In gleicher Weise werden die Ausgangsgleichung und eine entsprechende Strom-Spannungs-Beziehung definiert.

Das weitere Vorgehen, wie die Berechnung der linearen und nichtlinearen Strom-Spannungs-Beziehung, unterscheidet sich nicht wesentlich von den bereits erläuterten Schritten in den Kapiteln 5.3 und 5.4. Yeh schlägt für seine Methode die Nutzung im Voraus berechneter und tabellierter Lösungen vor.

5.6.5 Diskussion der DK-Methode

Die DK-Methode erbt die gute Eignung zur Automatisierbarkeit von der modifizierten Knotenpotentialanalyse, ebenso jedoch auch die umständliche Herleitung. Von Nachteil ist die hohe Ordnung des zugrunde liegenden Gleichungssystems, auch wenn die Matrizen in der Regel nur dünn besetzt sind.

Sehr unhandlich wird die DK-Methode, wenn Schaltungen mit parameterabhängigen Bauelementen zu beschreiben sind. Nach jeder Parameteränderung müssen die Koeffizienten der Systembeschreibung aktualisiert werden. Dazu sind, ausgehend von Gleichung (5.35), alle zeitdiskreten Matrizen neu zu berechnen. Die Ordnung des Gleichungssystems ist in diesem Zwischenschritt durch die Anzahl der Knoten vorgegeben, welche (in der Regel) deutlich höher ist als die Anzahl der unabhängigen Energiespeicher. Der entstehende Berechnungsaufwand ist entsprechend sehr hoch. Ein Zahlenbeispiel: Die Klangregelung aus Kapitel 4.6 erfordert mit sieben Knoten und einer Spannungsquelle eine Leitwertmatrix der Größe (8×8) , obwohl lediglich drei Energiespeicher im System enthalten sind.

Eine systematische und effizientere Variante der DK-Methode wird in [HZ11] vorgestellt. Das Problem parameterabhängiger Bauelemente wird hier durch eine Zerlegung der Leitwertmatrix in konstante und veränderliche Anteile gelöst. Bei einer Neuberechnung ist lediglich eine Teilmatrix mit geringer Ordnung zu invertieren, so dass Parameteränderungen einen vertretbaren Berechnungsaufwand zur Folge haben.

5.6.6 Beispiel: Diodenbegrenztes RC-Filter

Die Vorgehensweise bei der DK-Methode soll anhand der schon vertrauten nichtlinearen Beispielschaltung erläutert werden. Zunächst sind alle Energiespeicher durch diskrete Ersatzmodelle auszutauschen. Die beiden Kondensatoren C_1 und C_2 werden in diesem Schritt durch ihre diskretisierten Äquivalenzmodelle ausgedrückt, wie der Schaltplan in Abbildung 5.7 verdeutlicht. Die modifizierte Knotenpotentialanalyse führt auf

$$\varphi_1 : 0 = i_{ein} + i_{C1}(n-1) + G_{C1}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5.40)$$

$$\varphi_2 : 0 = G_{C1}(\varphi_1 - \varphi_2) - i_{C1}(n-1) + G_1(\varphi_3 - \varphi_2) \quad (5.41)$$

$$\varphi_3 : 0 = G_1(\varphi_2 - \varphi_3) + G_{C2}\varphi_3 + G_2\varphi_3 + i_{C2}(n-1) + i_D, \quad (5.42)$$

sowie zu der Zuordnung

$$\varphi_1 = u_{ein}. \quad (5.43)$$

In der Notation $\mathbf{GU}(n) = \mathbf{M}_1\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{M}_2\mathbf{u}(n) + \mathbf{M}_3\mathbf{i}(n)$ nach Gleichung (5.35) führt dies auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -G_{C1} & G_{C1} & 0 & 1 \\ G_{C1} & -G_1 - G_{C1} & G_1 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_1 - G_2 - G_{C2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ i_{ein} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{C1}(n-1) \\ i_{C2}(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_{ein} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i_D. \end{aligned} \quad (5.44)$$

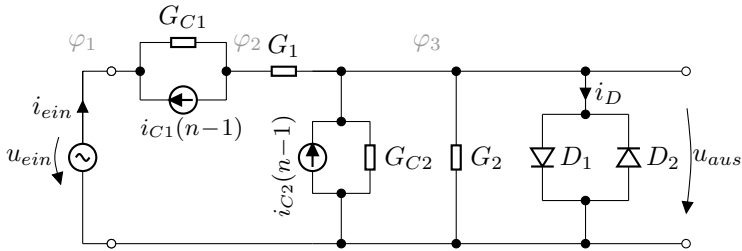


Abbildung 5.7: DK-Methode für die diodenbegrenzte RC-Filterschaltung.

Für die Aktualisierungsvorschrift nach Gleichung (5.37) folgt

$$\begin{pmatrix} i_{C1}(n) \\ i_{C2}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G_{C1} & -2G_{C1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{C2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ i_{ein} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{C1}(n-1) \\ i_{C2}(n-1) \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist durch Anwendung der Gleichung (5.39) abzuleiten. Die Simulationsergebnisse entsprechen denen der Modellierung nach Abschnitt 5.5.4.

5.7 Zusammenfassung des Kapitels

Die erweiterte Zustandsraumdarstellung ermöglicht die Beschreibung von nichtlinearen Systemen. Sie ist insbesondere für die Modellierung von elektronischen Schaltungen mit nichtlinearen Bauelementen geeignet.

Die Grundidee der Erweiterung ist die Abtrennung einer statischen, ggf. mehrdimensionalen Nichtlinearität vom linearen, dynamischen Teil des Systems. Durch die Nichtlinearität wird eine implizite Gleichung eingeführt, welche die Strom-Spannungs-Beziehung aller nichtlinearen Bauelemente enthält. Neben der Systemordnung l , der Anzahl der Eingänge r , und der Anzahl der Ausgänge m , wird die Anzahl unabhängiger Ströme durch nichtlineare Elemente als Ordnung der Nichtlinearität q eingeführt.

Das Lösen der impliziten Gleichung kann entweder im Voraus oder zur

Laufzeit geschehen. Im ersten Fall sind die Lösungen für festzulegende Wertebereiche in einer hinreichend genauen Abstufung zu ermitteln und in Form von Tabellen bereitzustellen. Die tabellierte Lösung beansprucht einen hohen bis sehr hohen Speicherbedarf, im Gegenzug jedoch nur wenige zusätzliche Berechnungen pro Zeitschritt. Das Lösen zur Laufzeit erfordert den Einsatz iterativer Lösungsverfahren in jedem Zeitschritt. Entsprechend stellt dieses Verfahren einen deutlich höheren Berechnungsaufwand dar, benötigt jedoch keinen Speicherplatz. Als Lösungsverfahren kommen die klassischen numerischen Ansätze in Betracht. Dabei hat sich das gedämpfte Newton-Verfahren mit geeignetem Startwert als besonders geeignet erwiesen.

Insbesondere bei der Betrachtung parameterabhängiger Systeme ist die Laufzeitberechnung die eindeutig praktikablere Lösung, da der Speicher- und Suchaufwand der tabellierten Lösung über alle Grenzen ansteigen würden.

6 Elektronenröhren

6.1 Bedeutung der Röhrentechnik im digitalen Zeitalter

Elektronenröhren spielen in der heutigen Elektrotechnik keine nennenswerte Rolle mehr, sie wurden mit der Einführung des Transistors schnell verdrängt. Eine der wenigen Ausnahmen stellen Audioverstärker dar, bei denen sich Röhrenschaltungen weiterhin großer Beliebtheit erfreuen. Neben hochwertigen Hi-Fi-Verstärkern für Audiophile sind Röhrenverstärker vor allem für Elektrogitarren populär. Schätzungen zufolge finden drei von vier der weltweit produzierten Audio-Röhren ihren Einsatz in Gitarrenverstärkern [Bar98].

Aus diesem Grund soll diesem Bauteil, seiner Funktion und schließlich seiner Modellierung ein eigenes Kapitel gewidmet werden.

6.1.1 Klangunterschiede zum Transistorverstärker

Es ist allgemein anerkannt, dass ein klanglicher Unterschied zwischen Röhren- und Transistorverstärkern besteht. Jeder Besitzer eines Röhrenverstärkers wird dabei fest behaupten, dass Röhrengeräte „besser“ klingen. Diese Aussage gilt sowohl für Gitarrenverstärker in Röhrentechnik wie für die Hi-Fi-Endstufe. Die Frage des Klangunterschieds entwickelt sich oft zu einer Glaubensfrage. Objektive Studien oder seriöse Hörvergleiche, sofern dies überhaupt möglich ist, gibt es kaum.

Zunächst soll diese Frage des Klangs unabhängig von dem Verwendungszweck (Hi-Fi oder Elektrogitarre) erörtert werden. Die typischerweise aufgeführten Klangattribute, die den Röhrenklang beschreiben sollen, sind z.B. „warm“ oder „weich“. Als Hauptursache dafür wird oftmals das unterschiedliche Klirrspektrum genannt, nämlich dass Röhren, bedingt durch die Krüm-

mung der Kennlinie, überwiegend ungeradzahlige Obertöne erzeugen¹, welche vom menschlichen Gehör als angenehm empfunden werden.

Grundsätzlich sind diese Aussagen nicht falsch. Es muss jedoch angemerkt werden, dass das Klirrspektrum nicht durch die Röhre allein, sondern vielmehr durch die Auslegung der Schaltung beeinflusst wird. Es ist durchaus möglich einen Röhrenverstärker mit hoher Linearität und geringen Klirrverzerrungen zu bauen, der Aufwand ist jedoch deutlich höher als bei Transistor-schaltungen. Eine deutliche Linearisierung wird bereits durch eine einfache Gegenkopplung erreicht, ein gut dimensionierter Ausgangsübertrager wirkt sich ebenfalls positiv aus.

Beschränkt auf Gitarrenverstärker ist die Frage etwas einfacher zu beantworten. In der Regel werden hier nichtlineare Verzerrungen durch starke Übersteuerung bewusst hervorgerufen. Die Verformung, die das Signal durch einen derart betriebenen Verstärker erfährt, wird als „soft-clipping“ bezeichnet und zeichnet sich bei Erhöhung der Signalamplitude durch ein allmähliches Hineingleiten in die Verzerrung aus. Ein Transistorverstärker zeigt diesbezüglich ein anderes Übersteuerungsverhalten, der Übergang zwischen linearer Verstärkung und Sättigung erfolgt hier unmittelbarer.

In der Vergangenheit wurden vielfach Versuche unternommen, Transistorverstärker für E-Gitarren mit röhrenähnlichem Übersteuerungsverhalten zu entwickeln und diese auf dem Markt zu etablieren (z.B. die Valvestate-Serie der Fa. MARSHALL). Darüber hinaus wurden einzelne Halbleiter-Schaltungen vorgeschlagen, die das Klirrverhalten übersteuerter Röhren nachbilden [Pri92, Dan04]. Es sind sogar kuriose Halbleiter-Module mit Röhrensockel auf dem Markt erhältlich, die 1:1 zum Austausch in bestehende Röhrenverstärker gesteckt werden können, z.B. „RetroValve“² oder „ToneGrinder“³. Auch diese Idee ist nicht neu, mit dem „Fetron“ wurde ein derartiges Modul bereits 1974 von TELEDYN SEMICONDUCTORS vorgestellt, das sogar in frühen MESA-BOOGIE Verstärkern werksseitig verbaut war.

¹ Die Fachtermini *Oberton* (Musik) und *Harmonische* (Physik) führen häufig zu Verwechslungen und falschen Aussagen: Als ungeradzahlige Obertöne werden die geradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz bezeichnet. Ungeradzahlige Obertöne sind dabei gleichbedeutend mit geradzahligen Harmonischen, z.B. k_2 und k_4 . Vgl. hierzu auch [Sen07].

² Roberts RetroValve Inc., <http://www.retrovalves.com/>

³ WattGrinder Engineering, <http://www.wattgrinder.com>

6.2 Physikalische Grundlagen

Die Elektronenröhre wird bereits seit Jahrzehnten nicht mehr auf den Lehrplänen der Universitäten und Fachhochschulen geführt. Dieses Kapitel gibt daher eine kurze Einführung in die Funktionsweise dieser Bauelemente, um allen Lesern das Verständnis der nachfolgenden Abschnitte zu erleichtern. Zur Vertiefung sei auf die Primärliteratur verwiesen [BW60, Spa42, RK51, Rei41].

6.2.1 Röhrendiode

Die einfachste Bauform einer Elektronenröhre ist die Röhrendiode, welche aus den zwei Elektroden *Anode* (engl. auch *plate*) und *Kathode* besteht, die in einem evakuierten Glaszylinder angeordnet sind. Die Kathode (K) wird stark beheizt, durch den Effekt der Glühemission führt das zur Freisetzung von Elektronen. Die Anode (A) ist so angeordnet, dass sie diese Elektronen auffangen kann und somit einen Stromfluss von Anode zu Kathode ermöglicht. Grundsätzlich ist der Stromdurchgang in entgegengesetzter Richtung ebenso wenig möglich wie die Leitung bei ungeheizter Kathode, da von einer kalten Elektrode keine Elektronen emittiert werden können.

Anlaufbereich

Die Elektronen verlassen die Kathode mit zufälliger Geschwindigkeit. Ein kleiner Teil der emittierten Elektronen, jene mit besonders hoher Anfangsgeschwindigkeit, werden die Anode erreichen, so dass ein sehr kleiner Strom beobachtet werden kann. Dieser Strom kann durch Anlegen einer negativen Spannung von Anode zu Kathode, teilweise oder vollständig, unterdrückt werden. Dieser Teil der Strom-Spannungs-Kennlinie wird als Anlaufbereich bezeichnet. Der Stromfluss wird beschrieben durch das Anlaufstromgesetz

$$I = I_0 \cdot e^{\frac{U}{E_T}}, \quad U < 0 \quad (6.1)$$

mit der Anodenspannung U , dem Strom I_0 bei $U = 0$ und der Temperaturspannung E_T .

Raumladungsbereich

Für die folgenden Überlegungen sei eine positive Spannung von Anode zu Kathode angelegt, so dass ein elektrisches Feld zwischen diesen Elektroden

wirksam ist. Die emittierten Elektronen werden von der positiven Anode angezogen und erfahren durch dieses elektrische Feld eine Beschleunigung. Der Stromfluss erhöht sich, da mit steigender Spannung mehr Elektronen die Anode erreichen. Die zur Anode herüberfliegenden Elektronen erzeugen jedoch, bedingt durch ihre eigene negative Ladung, ein elektrisches Feld. Jedes Elektron befindet sich nur für eine kurze Zeit im Bereich zwischen Kathode und Anode. Es folgen jedoch stets neue Ladungen nach, so dass man den Raum zwischen Anode und Kathode als eine ruhende Ladungsmenge betrachten kann [BW60]. Der Raum zwischen den Elektroden ist folglich negativ geladen. Diese *Raumladung* schirmt mit ihrem Feld die Anode ab und hindert somit nachfolgende Elektronen daran, zur Anode zu gelangen.

Der resultierende Strom ist also durch sich selbst begrenzt und stark von der Anodenspannung abhängig. Dies wird beschrieben durch das *Raumladungsgesetz*,

$$I = K \cdot U^{\frac{3}{2}}, \quad U > 0, \quad (6.2)$$

(in der Literatur auch als *Langmuir-Child-Gesetz* geführt) mit der Perveanz oder Röhrenkonstanten K , einer Größe, die einzig vom geometrischen Aufbau der Röhre bestimmt ist.

Sättigungsbereich

Übersteigt die Anodenspannung einen bestimmten Wert, so werden alle von der Kathode emittierten Elektronen von der Anode aufgefangen. Der resultierende Strom bleibt nahezu konstant, auch wenn die anliegende Spannung weiter erhöht wird. Die Röhre wird im Sättigungsbereich betrieben.

6.2.2 Trioden

Eine weitaus größere Bedeutung als die Röhrendioden haben Mehrgitterröhren, bei denen zusätzliche Elektroden (Gitter, engl. *grid*) in das evakuierte System eingebracht sind. Mit diesen ist es möglich, gezielt Einfluss auf den Anodenstrom zu nehmen, ihn also zu steuern. Im Unterschied zur meist massiven, flächigen Anode werden die Gitterelektroden in der Gestalt einer Drahtwendel, von Haltestäben fixiert, konzentrisch zur Kathode gehalten. Die Abstände zwischen den einzelnen Drähten der Wendel sind groß gegenüber dem Drahtdurchmesser, so dass Elektronen in ihrer Bewegung nicht durch die Gitterkonstruktion behindert werden.

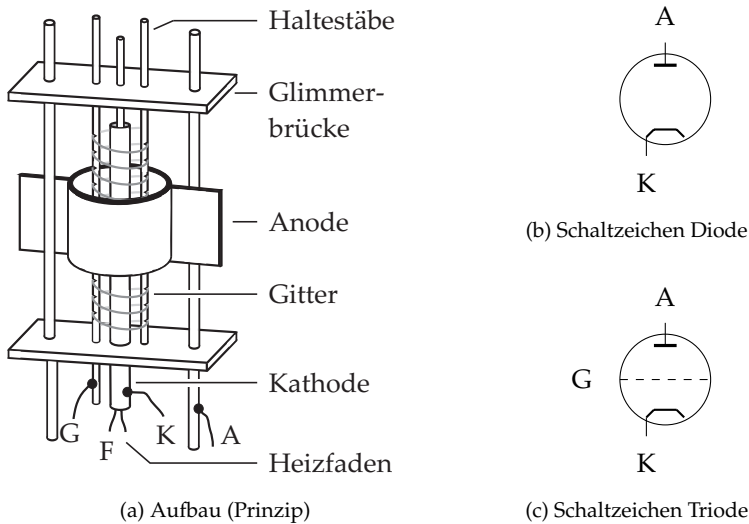


Abbildung 6.1: Schematischer Aufbau einer Triode und Schaltzeichen für Diode und Triode.

Der prinzipielle Aufbau einer Röhre mit einem Gitter und indirekt beheizter Kathode sowie gebräuchliche Schaltzeichen sind in Abbildung 6.1 dargestellt.

Die einfachste Bauform ist die Eingitterröhre oder Triode. Die zusätzliche Elektrode wird als Steuergitter (G) bezeichnet und befindet sich in geringem Abstand zur Kathode. Wird eine negative Spannung vom Gitter zur Kathode angelegt, so entsteht ein elektrisches Feld, das dem Feld der Anode entgegenwirkt. Dies hat eine Verringerung des Elektronenstroms zur Anode zur Folge. Mit einer entsprechend höheren, negativen Spannung kann der Strom vollständig unterdrückt, das Bauteil also gesperrt werden. Kleine Änderungen der Gitterspannung resultieren in einer großen Änderung des Anodenstroms, was die Anwendung als Verstärker ermöglicht.

Konventionen: Im Folgenden bezeichnet U_a die Anoden- und U_g die Gitterspannung, beide bezogen auf das Kathodenpotential. Es gilt $I_k = I_g + I_a$, wobei I_k , I_a und I_g den Kathoden-, Anoden- und Gitterstrom kennzeichnen. Sowohl I_a als auch I_g sind, entsprechend der konventionellen Stromrichtung, in die Röhre gerichtet.

Um den Einfluss des Steuergitters erfassen zu können, werden Anode und Gitter zu einer Elektrode zusammengefasst, welche an der Stelle des Gitters

liegt [BW60]. An dieser liegt die *Steuerspannung*,

$$U_{st} = (U_g + DU_a), \quad (6.3)$$

wobei der *Durchgriff* D als dimensionslose Größe angibt, um wieviel schwächer die Anodenspannung U_a auf den Kathodenstrom einwirkt als die Gitterspannung U_g . In der englischsprachigen Fachliteratur ist der Begriff des Durchgriffs wenig relevant, vielmehr hat sich dort der *Verstärkungsfaktor* $\mu = \frac{1}{D}$ durchgesetzt. Üblich ist die Notation

$$U_{st} = \left(U_g + \frac{U_a}{\mu} \right). \quad (6.4)$$

Wie bei der Röhrendiode gibt es einen Raumladungsbereich. Der Kathodenstrom berechnet sich analog zu Gleichung (6.2),

$$I_k = K \cdot (U_{st})^{\frac{3}{2}}, \quad U_{st} > 0. \quad (6.5)$$

Gleichung (6.5) gilt für den „normalen“ Arbeitsbereich der Triode: Das Gitter ist leicht negativ gegenüber der Kathode, während die Anodenspannung recht hoch ist (z.B. $U_g = -2\text{ V}$ und $U_a = 300\text{ V}$). In diesem Fall erfolgt die Steuerung leistungslos, d.h. Anoden- und Kathodenstrom entsprechen einander,

$$I_g = 0 \quad (6.6)$$

$$I_a = I_k. \quad (6.7)$$

Abbildung 6.2 zeigt das Kennlinienfeld einer idealen Triode im Raumladungsbereich gemäß Gleichung (6.5).

Gitterstrom

Als Sonderfall ist die Triode mit positiver Gitterspannung zu betrachten. Das positive Gitter zieht nun ebenfalls Elektronen an und der von der Kathode emittierte Elektronenstrom wird sowohl von der Anode als auch vom Gitter aufgenommen. Ein Gitterstrom entsteht, die Annahme der leistungslosen Steuerung verliert ihre Gültigkeit. Dies ist in den meisten Anwendungen ein unerwünschter Zustand, da durch den Gitterstrom zusätzliche Verzerrungen entstehen und es zu temporären Verschiebungen des Arbeitspunktes kommt. Der Entwickler einer Röhrenschialtung ist in der Regel sehr darauf bedacht,

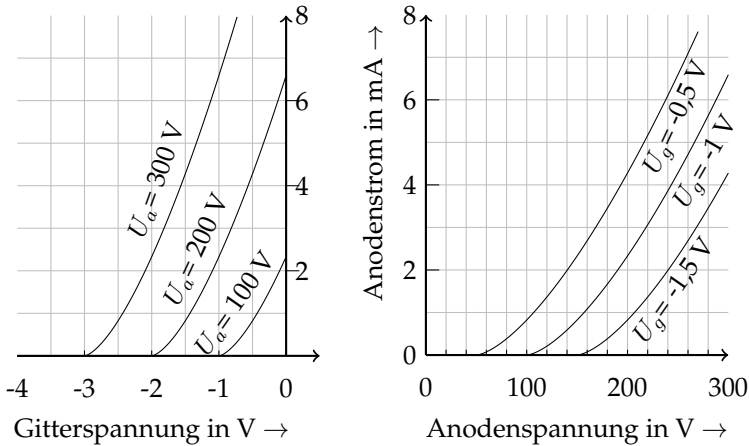


Abbildung 6.2: Kennlinienfeld einer idealen Triode ähnlich ECC83 (Raumladungsbereich).

Maßnahmen gegen das Einsetzen von Gitterströmen zu treffen. Dennoch ist genau dies in vielen Schaltungen von Gitarrenverstärkern zu beobachten, wo es zu (hörbaren) Artefakten wie der *blocking distortion* [Ble09, Aik99] führt. Für die korrekte Simulation ist die Berücksichtigung des Gitterstroms von großer Bedeutung, insbesondere wenn gekoppelte Stufen in einer Kaskade zu untersuchen sind.

Eine Abschätzung des Gitterstroms liefern die Stromverteilungsformeln, welche von Tank [Tan22] und Spangenberg [Spa42] vorgeschlagen worden sind. Grundlage ist die Überlegung, dass die elektrische Feldverteilung innerhalb einer Elektrodenanordnung einzig vom Verhältnis der zugeführten Spannungen abhängig ist, nicht aber von der jeweiligen Amplitude (vgl. auch [BW60]). Die Aufteilung in Gitter- und Anodenstrom muss folglich eine Funktion des Spannungsverhältnisses U_a/U_g sein, eine Näherung, die durch Messungen bestätigt wurde. Für die Stromverteilung in einer Triode gilt nach Spangenberg [Spa42, dort als *primary-grid-current law* geführt]

$$\frac{I_a}{I_g} = \delta \sqrt{\frac{U_a}{U_g}}, \quad \frac{U_a}{U_g} > 0,8 \quad \text{und} \quad U_g > 0 \quad (6.8)$$

mit der Konstanten δ . Entsprechend gilt für den Gitterstrom

$$I_g = I_k \cdot \frac{1}{1 + \delta \sqrt{\frac{U_a}{U_g}}}, \quad U_g > 0. \quad (6.9)$$

Die Stromverteilung nach Tank führt auf einen sehr ähnlichen Ausdruck.

6.3 Reale, nicht-ideale Trioden

Die Kennlinien realer Röhren weichen zum Teil erheblich von den errechneten Kennlinien idealisierter Röhren ab, aber auch von den Kennlinien, die die Hersteller veröffentlicht haben. Gründe dafür liegen z.B in der Toleranzbreite mit der die Hersteller ihre Röhren ausgeliefert haben. Aber auch die Kennlinien gleicher Röhren verschiedener Hersteller unterscheiden sich. Ausschlaggebend sind dabei geringfügig unterschiedliche Konstruktionsmerkmale, Fertigungskonzepte sowie verschiedene Ausgangsmaterialien. Ein großer Einfluß ist den Alterungserscheinungen durch den Betrieb der Röhre zuzuschreiben. So können Röhren desselben Typs und Herstellers bis zu 20 % Abweichung voneinander aufweisen. Beispielhafte Messungen werden in [Zol10, Pot09] diskutiert. Vergleicht man nun Röhren aus aktueller Produktion mit „neuen“ Röhren aus alten, eingelagerten Beständen (sog. NOS, engl. *new old stock*) oder eben gebrauchten Exemplaren, so sind große Variationen der elektrischen Kennwerte festzustellen - was erklärt, warum diese unterschiedlich „klingen“.

6.3.1 Abweichungen im Raumladungsbereich

Die Kennlinien einer idealen Triode sind im Raumladungsbereich durch das Raumladungsgesetz, Gleichung (6.5), zu berechnen. Bei einer realen Triode weicht der Exponent in dieser Formel mitunter vom theoretischen Wert $\frac{3}{2}$ ab. Dies lässt sich mit der Tatsache begründen, dass das Raumladungsgesetz für die *ideale* Triode gilt und der Berechnung ein stark simplifizierter Aufbau zugrunde liegt, welcher die Konstruktion realer Trioden nur näherungsweise wiedergibt.

In einer historischen Studie von Kniekamp wurden die Abweichungen des Exponenten recht gründlich untersucht [Kni31], wobei als Ursache verschiedene, einander entgegenwirkende Effekte identifiziert wurden. Demzufolge kann der Exponent einer realen Triode durchaus größere wie auch kleinere

Werte aufweisen. Reich gibt für den Exponenten großzügig den Bereich 1,2 bis 2,5 an [Rei41].

6.3.2 Sekundärelektronen

Wenn ein beschleunigtes Elektron auf einer Elektrode auftrifft, so können durch den Stoß weitere Elektronen aus dieser Elektrode herausgeschlagen werden. Die herausgeschlagenen Elektronen werden als Sekundärelektronen bezeichnet. Elektronen, die der Kathode entstammen, werden entsprechend Primärelektronen genannt. Das Ausmaß der Sekundärelektronen ist von vielen Faktoren abhängig. Wichtig sind vor allem die Geschwindigkeit beim Auftreffen, der Einfallswinkel sowie Material und Oberflächenbeschaffenheit der getroffenen Elektrode.

Für Trioden mit negativem Gitter kann dieser Effekt vernachlässigt werden, da aus der Anode herausgelöste Elektronen auch wieder zu dieser zurückfliegen werden. Ist das Gitter positiv, so können zum einen auch Sekundärelektronen am positiven Gitter entstehen, welche dann zur positiveren Anode fliegen werden, zum anderen können bei sehr hohem Gitterpotential sogar aus der Anode geschlagene Elektronen zum Gitter gelangen. Grundsätzlich führen Sekundärelektronen zu einer Verformung der I_a - und I_g -Kennlinien, oft sogar in extremem Ausmaß. Abweichungen von Gleichung (6.9) können bei nicht-idealen Trioden zu einem großem Teil durch diesen Effekt erklärt werden [BW60, Spa42].

6.3.3 Datenblattangaben

Für die Dimensionierung und Berechnung einer Röhrenschialtung (z.B. Arbeitspunkt oder Verstärkung) sind die Datenblattangaben der Hersteller maßgeblich und ausreichend. Das einzelne Exemplar kann jedoch bedeutend von diesen gemittelten Werten abweichen, siehe Abschnitt 6.3. Dies gilt insbesondere für jene (preisgünstigen) Röhrentypen, die in Gitarrenverstärkern vorherrschen. Eine Übersicht über die Grunddaten üblicher Trioden gibt Tabelle 6.1. Aufgeführt sind der nominelle Verstärkungsfaktor μ sowie die Grenzwerte für den Kathodenstrom $I_{k,max}$, die Anodenspannung $U_{a,max}$ und die Anodenverlustleistung $P_{max} = \max(I_a \cdot U_a)$.

Die populärste Triode ist die ECC83, welche die Vorverstärker typischer Gitarrenverstärker seit jeher dominiert [ECC83]. Die Triode ECC81 ist eigentlich als HF-Typ spezifiziert, sie wurde jedoch auch gelegentlich in Gitarrenverstärkern eingesetzt [ECC81].

6.4 Messungen an Trioden

Angaben über den Gitterstrom sind üblicherweise nicht in den Datenblättern enthalten, auch gibt es keine Aussagen über die zu erwartenden Abweichungen. Um verlässliche Referenzdaten für die nachfolgende Modellbildung zur Verfügung zu haben, wurden zahlreiche Messungen an den relevanten Triodentypen durchgeführt [DZ11b, DHZ11]. Für das vollständige Kennlinienfeld waren Anoden- und Gitterstrom in Abhängigkeit von Anoden- und Gitterspannung über einen weiten Wertebereich aufzunehmen.

Für diese Aufgabe wurde ein automatisierter Messplatz konzipiert. Steuerbare, präzise Spannungsquellen und genaue Tisch-Multimeter wurden dabei über einen PC gesteuert. Die Erfassung, Speicherung und Auswertung der Messergebnisse übernahm ebenfalls der PC. Die Spezifikationen waren:

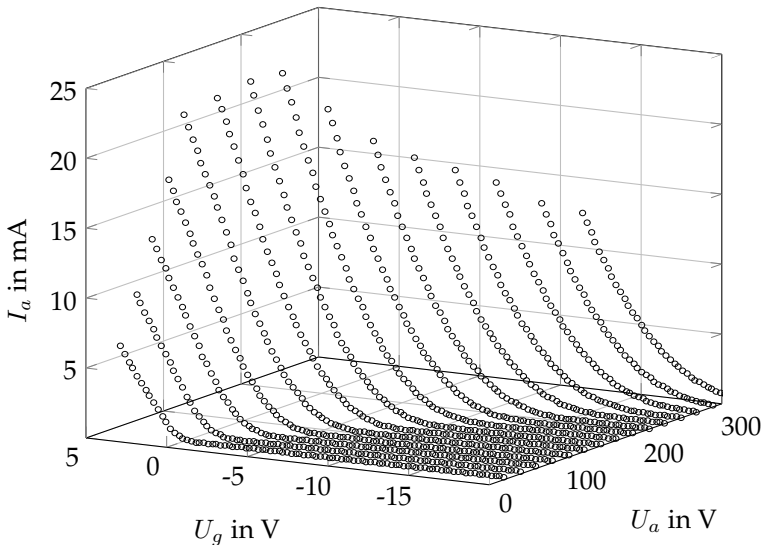
- Die Ströme I_g und I_a werden gleichzeitig für ein fest eingestelltes Spannungs-Wertepaar (U_a, U_g) gemessen. Dies wird in sehr kurzem Abstand mehrere Male wiederholt, wobei der Median als Resultat übernommen wird.
- Die Messung erfolgt spannungsrichtig, der Fehler bei der Strommessung ist vernachlässigbar klein.
- Die Spannungswerte werden vor jeder Strommessung kontrolliert und ggf. nachgeregelt.
- Alle Strommessungen erfolgen mit einer Genauigkeit von 100 nA.
- Abkühlzeiten für die bis in die Grenzbereiche hinein belasteten Röhren werden vom Messprogramm berücksichtigt.
- Um die Prüfobjekte nicht zu zerstören, werden die Grenzwerte für Verlustleistung P_{max} und Kathodenstrom $I_{k,max}$ nicht überschritten.
- Vor Beginn eines Messdurchlaufs wird eine ausreichende Warmlaufzeit für die Geräte, sowie eine Aufheizzeit für die Röhren sichergestellt.

Mit diesem Messaufbau war es möglich, die Ströme $I_a(U_a, U_g)$ und $I_g(U_a, U_g)$ gleichzeitig und mit hoher Auflösung für einen definierbaren Spannungsbereich zu ermitteln. Nach erfolgter Messung lagen die ermittelten Ströme dann für ein diskretes, feinmaschiges Netz (U_a, U_g) vor. Dies ist exemplarisch in Abbildung 6.3 dargestellt.

Tabelle 6.1: Gängige Trioden in Instrumentenverstärkern.

Bezeichnung	μ	$I_{k,max}$	$U_{a,max}$	P_{max}
ECC83 (12AX7)	100	8 mA	300 V	1,00 W
ECC82 (12AU7)	17...19,5	20 mA	300 V	2,75 W
ECC81 (12AT7)	60...70	15 mA	300 V	2,50 W

Für eine ECC83 haben sich beispielsweise folgende Messparameter als sinnvoll erwiesen: $U_a = 20\text{ V}$ bis 300 V in 20 V -Schritten mit einer Genauigkeit von $\pm 100\text{ mV}$ sowie $U_g = -4\text{ V}$ bis 3 V in 100 mV -Schritten mit einer Genauigkeit von $\pm 10\text{ mV}$. Für andere Röhrentypen sind die Spannungsbereiche entsprechend anzupassen, so dass der jeweils signifikante Arbeitsbereich erfasst wird.

**Abbildung 6.3:** Gemessener Anodenstrom über diskrettem Spannungs-Netz für eine ECC82 Triode.

Verifikation des Messverfahrens

Grundsätzlich stellt die Messung von Röhrenkennlinien keine große Herausforderung dar, diese Aufgabe lässt sich letztlich auf die möglichst präzise Messung von Strömen und Spannungen herunterbrechen. Zudem können geeignete Messverfahren der Standardliteratur entnommen werden. Fehlerhafte Messergebnisse würden zu falschen Annahmen verleiten und schließlich unzureichende Modelle zur Folge haben.

Die Richtigkeit der Messergebnisse des in diesem Kapitel vorgestellten Messverfahrens ist durch einen Kollegen der Forschungsgruppe *Sound Analysis/Synthesis* am IRCAM Paris bestätigt worden. Dieser hatte sich kürzlich ebenfalls mit der Messung und Modellierung von Elektronenröhren beschäftigt [CH09, CH10]. Zu diesem Zweck wurde eine „blinde“ Kennlinienbestimmung zu einem ausgeliehenen Messobjekt durchgeführt, einer Triode vom Typ ECC83 (Label: Groove Tubes). Trotz sehr unterschiedlicher Messverfahren wurden äquivalente Ergebnisse erzielt.

6.5 Diskussion der Messergebnisse

Abbildung 6.4 vergleicht die Messergebnisse einer Röhre vom Typ ECC83 (Hersteller: RSD) qualitativ mit einer nach dem Raumladungsgesetz berechneten Kennlinie. Grundsätzlich entsprechen die Messdaten der nach

$$I_k = K \cdot (U_{st})^{\frac{3}{2}}, \quad U_{st} = \left(U_g + \frac{U_a}{\mu} \right) \geq 0 \quad (6.10)$$

berechneten Kennlinie. Es sind jedoch zwei Unterschiede erkennbar. Zum einen passt der theoretische $\frac{3}{2}$ -Exponent nicht ganz zu der gemessenen Kennlinie, siehe Abbildung 6.4(a). Im dargestellten Beispiel ist die Steigung der gemessenen Kurve etwas geringer, was einem Exponenten $< \frac{3}{2}$ entsprechen würde. Der zweite Unterschied lässt sich am Fuß der Kennlinie ausmachen. Gemäß Gleichung (6.10) gilt $I_k = 0$ für $U_{st} = 0$ und ist durch die Gleichung nicht definiert für $U_{st} < 0$. Die Messungen lassen jedoch für diesen Fall immer noch einen geringen Stromfluss erkennen sowie einen sanften Übergang bis hin zu $I_k \approx 0$. Hier greift das Anlaufstromgesetz, die Berechnung nach Gleichung (6.10) ist nicht mehr geeignet. Dies ist dargestellt in Abbildung 6.4(b), wobei die hervorgehobene Zone den Bereich $U_{st} < 0$ markiert.

Bei Betrachtung der gemessenen Ströme ist eine weitere Abweichung erkennbar. Bei vielen Röhren ist eine Verdrehung von I_k gegenüber Gleichung

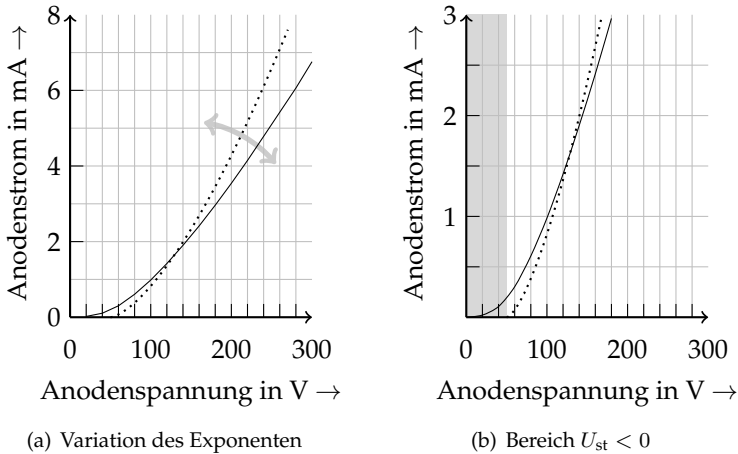


Abbildung 6.4: Anodenstrom nach dem Raumladungsgesetz (gepunktet) und Messergebnisse einer Röhre vom Typ ECC83 in qualitativer Gegenüberstellung.

chung (6.5) zu verzeichnen, der gemessene Kathodenstrom ist dabei höher für große, und niedriger für kleine Anodenspannungen U_a .

Um die Gültigkeit des Stromverteilungsgesetzes, Gleichung (6.9), zu überprüfen, wurde der Quotient I_g/I_k für $U_g > 0$ aus den Messdaten bestimmt. Eine räumliche Interpretation zeigt Abbildung 6.5(a). Die qualitative Gegenüberstellung mit dem theoretischen Verlauf der Formel verrät Abweichungen im Bereich kleiner Gitterspannungen. Dies wird in der Projektion I_g/I_k als Funktion von U_g deutlich, siehe Abbildung 6.5(b). Nach Spangenberg ist ein steiler Anstieg mit U_g zu erwarten, die Messwerte zeigen jedoch einen gekrümmten Anstieg, der erst später den erwarteten Verlauf annimmt.

6.6 Modellierung von Trioden

In den letzten 20 Jahren wurden etwa ein Dutzend verschiedene Röhrenmodelle für SPICE vorgestellt. Die gleichen mathematischen Beschreibungen sind seitdem auch vielfach für die Echtzeitanwendung in Verstärkersimulationen vorgeschlagen worden [SST07, CRC09, PY09, YAS10, CH10]. Die Anwendung verschiedener SPICE-Modelle wird in [Pot09] diskutiert.

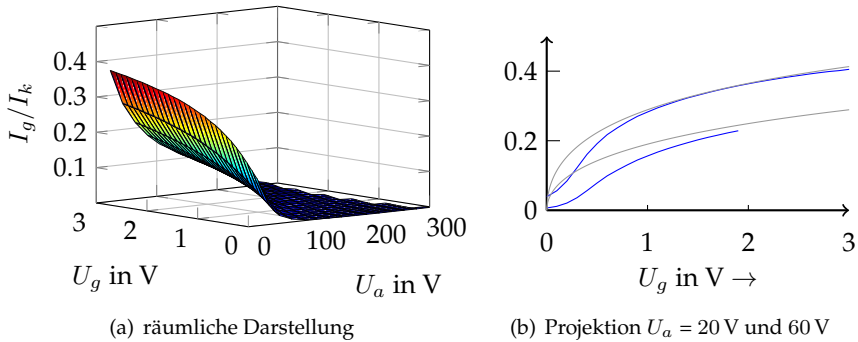


Abbildung 6.5: Ratio I_g/I_k aus Messwerten einer Valvo ECC81. Im rechten Bild ist auch der theoretische Verlauf \sim Spangenberg zu sehen (grau).

Grundsätzlich kann eine Einteilung in *physikalische* und *heuristische* Modelle getroffen werden. Zur ersten Gruppe zählen diejenigen Modelle, welche sich aus den physikalischen Röhregrundlagen ableiten lassen. Die heuristischen oder auch phänomenologischen Ansätze hingegen lassen meist keinen Zusammenhang zur Physik erkennen. Sie beschreiben das Klemmenverhalten des Bauelements, ohne die Ursachen zu erklären. Eine andere sinnvolle Einteilung lässt sich nach dem beabsichtigten Verwendungszweck treffen: Während die ersten Röhrenmodelle für die SPICE-Simulation von Hi-Fi-Verstärkern gedacht waren, so sind die neueren Ansätze eindeutig durch (verzerrende) Gitarrenverstärker motiviert.

Im Folgenden werden einige wichtige Ansätze zur Modellierung von Röhren vorgestellt.

6.6.1 Ansatz nach Leach

Das Triodenmodell nach Leach [Lea95] basiert auf dem Raumladungsgesetz nach Gleichung (6.5), allerdings in leicht modifizierter Form. Für den Anodenstrom wird die Beziehung

$$I_a = \begin{cases} K(\mu U_g + U_a)^{\frac{3}{2}} & , \mu U_g + U_a \geq 0, \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.11)$$

mit den Konstanten K und μ genutzt. Der Exponent ist auf $\frac{3}{2}$ festgelegt. Der Gitterkreis wird mit einer einfachen Diode sowie einem Widerstand realisiert. Zusätzliche parasitäre Kapazitäten erlauben ein dynamisches Verhalten.

6.6.2 Ansatz nach Koren

Zweifelsohne am weitesten verbreitet ist das heuristische Röhrenmodell von Koren [Kor96]. In seinem 1996 vorgeschlagenen SPICE-Modell wird die Triode mittels vorhandener Schaltungselemente (Spannungsgesteuerte Stromquellen, Widerstände, eine Diode) sowie einer mathematischen Gleichung beschrieben. Für den Anodenstrom einer Triode gilt

$$E_1 = \frac{U_a}{k_P} \log \left(1 + \exp \left(k_P \left(\frac{1}{\mu} + \frac{U_g}{\sqrt{k_{VB} + U_g^2}} \right) \right) \right) \quad (6.12)$$

$$I_a = \frac{E_1^X}{k_G} (1 + \text{sgn}(E_1)) \quad (6.13)$$

mit den Parametern k_P , k_{VB} , k_G , μ und X . Der Gitterkreis wird mit einer Diode und einem Widerstand realisiert, außerdem sind parasitäre Kapazitäten und hochohmige Widerstände zwischen den Anschlüssen (A), (G) und (K) vorgesehen. In seinem Artikel gibt Koren Parametersätze für viele gängige Röhren an. Weitere Parametersätze sind in [Kon98] zu finden.

Der Ansatz von Koren führt zu guten Ergebnissen für negative Gitterspannungen, bei positivem Gitter kommt es jedoch zu starken Abweichungen.

6.6.3 Ansatz nach Cohen und Hélie

Das Modell nach Cohen und Hélie [CH10] ist explizit für die Anwendung in Echtzeitsimulationen unter Berücksichtigung positiver Gitterspannungen vorgesehen. Grundlage ist das Koren-Modell (Gleichungen (6.12) und (6.13)), das um einen realistischeren Gitterstrom erweitert wird, realisiert durch eine abschnittsweise definierte Funktion,

$$I_g = \begin{cases} 0 & , U_g < U_\gamma - K_n, \\ \frac{U_g - U_\gamma}{R_{gk}} & , U_g > U_\gamma + K_n, \\ aU_g^2 + bU_g + c & , \text{sonst}, \end{cases} \quad (6.14)$$

mit dem Gitterwiderstand R_{gk} , einer Schwellwertspannung U_γ und dem Parameter K_n , der die Breite des Übergangs bestimmt. Die Variablen a , b und

c werden so gewählt, dass ein stetiger Übergang entsteht. Diese Parameter sowie jene des Koren-Modells werden dann mit einem Minimierungsansatz an gemessene Referenzdaten angepasst.

6.6.4 Ansatz nach Cardarilli et al.

Das von Cardarilli, Re und Di Carlo vorgeschlagene Triodenmodell [CRC09] entstand ebenfalls mit der Absicht, Röhrenschaltungen bei positivem Gitter in SPICE zu simulieren. Ausgangspunkt ist wieder die Raumladungsgleichung unter zusätzlicher Berücksichtigung der Anfangsgeschwindigkeit der emittierten Elektronen h (eine ähnliche Notation findet sich bei Reich [Rei41]). Alle Röhren-„Konstanten“ werden daraufhin durch Polynome dritten Grades ersetzt, was zur folgenden Beschreibung für den Kathodenstrom führt:

$$I_k = K(U_g) \left(U_g + \frac{U_a}{\mu(U_g)} + h(U_g) \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6.15)$$

mit den Polynomen

$$K(U_g) = \sum_{i=0}^3 a_i U_g^i, \quad \mu(U_g) = \sum_{i=0}^3 b_i U_g^i, \quad h(U_g) = \sum_{i=0}^3 c_i U_g^i. \quad (6.16)$$

Weiterhin wird für den Gitterstrom eine Stromverteilungsformel ähnlich der Gleichung (6.9) genutzt,

$$I_g = \frac{I_k}{1 + D \left(\frac{U_a}{U_g - U_{off}} \right)^K}, \quad (6.17)$$

wobei U_{off} eine Verschiebung des Einsatzpunktes bewirkt, also ein Kontaktpotential darstellt. Schließlich werden die Gleichungen (6.15) und (6.17) mit ihren vielen Unbekannten an Referenzdaten aus Messungen angepasst.

In [CRC09] werden vielversprechende Simulationsergebnisse für einen klassischen Gitarrenverstärker mit der Triode ECC83 vorgestellt. Dennoch verliert das Modell an physikalischer Interpretation, da die Polynome dazu neigen, einen unrealistischen Verlauf im Randbereich anzunehmen. Außerdem können Definitionslücken hervorrufen werden, da Nullstellen im Nenner des Modells möglich sind.

6.7 Ein Beitrag zur Modellierung von Trioden bei positivem Gitter

Auf der Grundlage der Beobachtungen aus den Röhrenmessungen (siehe Kapitel 6.4 und 6.5) soll nun ein neues Röhrenmodell entwickelt werden, das für die Modellierung relevanter Gitarrenverstärker geeignet ist [DZH11]. Dabei werden folgende Anforderungen gestellt: Zunächst soll die Beschreibung weitgehend physikalisch motiviert sein, d.h. die beschreibenden Gleichungen müssen einen Zusammenhang zur Physik der Elektronenröhre erkennen lassen. Des Weiteren soll das Modell individuell anpassbar sein, so dass Simulationen auf selektierte Bauelemente zugeschnitten werden können. Schließlich ist eine geringe Rechenkomplexität wünschenswert, um den Einsatz in Echtzeitsimulationen zu ermöglichen.

6.7.1 Vorüberlegung zum Raumladungsstrom

Um die Nähe zur Physik zu wahren, kann als Ausgangsgleichung für den Kathodenstrom nur das Raumladungsgesetz nach Gleichung (6.5) dienen. Damit Abweichungen realer Trioden erfasst werden können, ist neben der Röhrenkonstanten K und dem Verstärkungsfaktor μ auch der Exponent als freier Parameter zu betrachten, welcher fortan als γ bezeichnet wird. Als erste Näherung für den Kathodenstrom folgt

$$I_k \approx K \cdot (U_{st})^\gamma, \quad U_{st} > 0. \quad (6.18)$$

In dieser Gleichung sind die Abweichungen am Fuß der Kennlinie noch nicht berücksichtigt.

6.7.2 Vorüberlegung zum Gitterstrom

In Abschnitt 6.2.2 wurde mit der Stromverteilungsformel bereits eine Relation in der Form

$$I_g = \Delta \cdot I_k \quad (6.19)$$

vorge stellt, wobei Δ näherungsweise als eine Funktion des Spannungsverhältnisses U_a/U_g anzunehmen ist. Unter der groben Annahme, dass für den typischen Einsatz $U_a/U_g \gg 1$ gegeben ist, lässt sich dieser Ausdruck weiter vereinfachen zu

$$\Delta = \frac{1}{1 + \tilde{\delta} \sqrt{\frac{U_a}{U_g}}} \approx \delta \sqrt{\frac{U_g}{U_a}}. \quad (6.20)$$

Zu beachten ist, dass Gleichung (6.20) nur für positive Gitterspannungen definiert ist.

6.7.3 Glatte Übergänge

Die Auswertung der Röhrenmessungen hat gezeigt, dass die realen Kennlinien an keiner Stelle Sprünge oder Unstetigkeiten zeigen. Im Grenzgebiet des Raumladungsbereiches ist ein sanfter Übergang zu beobachten, gleiches gilt auch für das Einsetzen eines Gitterstromes.

Um eine bessere Anpassung der Ausgangsformeln Gleichungen (6.18) und (6.20) in eben diesen Grenzgebieten sicherzustellen, sind stetige, glatte Übergangsbereiche anzustreben. Sehr gute Ergebnisse lassen sich mit einer Kombination von Exponential- und Logarithmus-Funktion erzielen. Dies soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Diskutiert wird dazu eine abschnittsweise definierte Funktion f_1 mit

$$f_1(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Ganz offensichtlich hat f_1 einen Knick an der Stelle $x = 0$. Den gleichen asymptotischen Verlauf für größere Werte $|x|$ zeigt Funktion g_1 mit

$$g_1(x) = \log(1 + e^x), \quad (6.22)$$

dies allerdings mit einem glatten Übergang. Mit steigendem x nähert sich $g_1(x) \approx \log(e^x) = x$ und schmiegt sich der linearen Funktion f_1 zunehmend an. Gleiches gilt für die $-x$ -Richtung, wo der Funktionswert gegen Null strebt. Durch Einfügen eines Faktors C kann der Kurvenverlauf sogar noch weiter an die lineare Funktion adaptiert werden,

$$h_1(x) = \log(1 + e^{Cx}) \frac{1}{C}, \quad (6.23)$$

wobei sich für $C > 1$ eine höhere Angleichung an f_1 einstellt. Diese Beziehung ist in Abbildung 6.6(a) illustriert, in der die Gleichungen (6.21), (6.22) und (6.23) gezeichnet sind.

Derselbe Ansatz kann auch auf Potenzfunktionen angewendet werden, z.B. kann die quadratische Funktion

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

durch Herausziehen der Potenz wie folgt ersetzt werden

$$g_2(x) = (\log(1 + e^x))^2 \quad (6.25)$$

$$h_2(x) = \left(\log\left(1 + e^{Cx}\right)\frac{1}{C}\right)^2, \quad (6.26)$$

siehe Abbildung 6.6(b).

Mit diesem mathematischen Verfahren können auch die Modellgleichungen geglättet werden. Diese Idee ist nicht neu, die Kombination aus Logarithmus- und Exponentialfunktion ist auch in Gleichung (6.12) in der Beschreibung von Koren auszumachen. Die um den Adaptionfaktor erweiterte Gleichung erweist sich dabei als deutlich flexibler und wird daher im neuen Röhrenmodell genutzt.

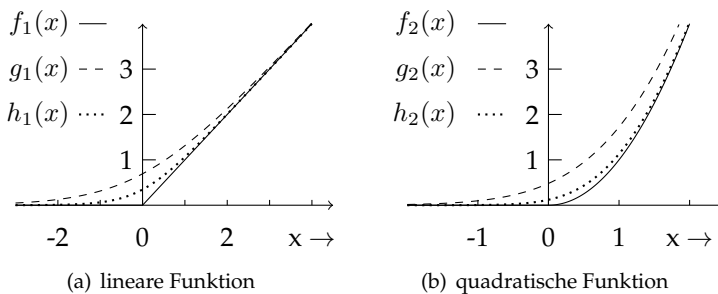


Abbildung 6.6: Glätten mit der Log/Exp-Kombination. Dargestellt sind die Originalfunktionen f_i , geglättete Funktionen g_i (gestrichelt) und h_i (gepunktet) mit Adaptionfaktor $C = 2$.

6.7.4 Modellgleichungen

Für den Kathodenstrom wird nun die Glättung nach Abschnitt 6.7.3 auf Gleichung (6.18) angewendet

$$I_k = K \left(\log \left(1 + \exp \left(C_a \left(\frac{1}{\mu} U_a + U_g \right) \right) \right) \frac{1}{C_a} \right)^\gamma, \quad (6.27)$$

wobei der Adaptionfaktor C_a auch gleich zur Kompensation der Verdrehung genutzt werden kann. Als hinreichend genau hat sich eine Abhängigkeit von der Anodenspannung gemäß

$$C_a = \frac{F}{1V + U_a} > 0 \quad (6.28)$$

erwiesen, andere Ausdrücke $C_a(U_a)$ sind ebenfalls denkbar.

In ähnlicher Weise wird auch der Gitterstrom beschrieben. Nach Gleichung (6.20) wurde der Stromverteilungsfaktor bereits grob vereinfacht zu

$$\Delta = \frac{1}{1 + \tilde{\delta} \sqrt{\frac{U_a}{U_g}}} \approx \delta \sqrt{\frac{U_g}{U_a}}. \quad (6.29)$$

In Abschnitt 6.5 wurde zudem herausgestellt, dass die Messwerte im Bereich sehr kleiner Gitterströme vom Ausdruck nach Spangenberg abweichen. Statt dem spontanen Anstieg, wie ihn die Wurzelfunktion fordert, zeichnet sich der Fuß der Kurve eher durch einen quadratischen Anstieg aus. Mit dieser Erkenntnis wird ein quadratischer Term aus Gleichung (6.29) herausgezogen,

$$\Delta = \delta \left(\frac{U_g}{U_a} \right)^2 \left(\frac{U_g}{U_a} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (6.30)$$

eine Formel, die sich zwar schwerlich aus der Physik ableiten lässt, jedoch die Messwerte gut erfasst. Die Anwendung der Log/Exp-Kombination beschränkt sich nun auf den hinteren Teil

$$\Delta = \delta \left(\frac{U_g}{U_a} \right)^2 \left(\log \left(1 + \exp \left(C_g \left(\frac{U_g}{U_a} \right) \right) \right) \frac{1}{C_g} \right)^\zeta, \quad (6.31)$$

wobei der Exponent ζ tatsächlich Werte nahe $-\frac{3}{2}$ annehmen wird. Im Bereich sehr kleiner Gitterströme dominiert der quadratische Term, der Funktionswert nähert sich dann aber der Stromverteilung nach Spangenberg an. Es gilt weiterhin $\Delta = 0$ für $U_g < 0$.

Für Gitter- und Anodenstrom folgt schließlich

$$I_g = I_k \cdot \Delta \quad (6.32)$$

$$I_a = I_k - I_g. \quad (6.33)$$

Diese Modellgleichungen fußen auf den bekannten physikalischen Beziehungen, besitzen aber Freiheitsgrade, die eine individuelle Anpassung an Messdaten erlauben. Auf diesen Schritt wird in Abschnitt 6.9 eingegangen. Neben den Formulierungen für die Echtzeitsimulation wurden die Modellgleichungen auch für SPICE implementiert, der Quellcode hierzu ist in Anhang A abgedruckt.

6.8 Alternativer Ansatz

Als Alternative wurde ein weiteres Triodenmodell entwickelt, das sich von dem vorangegangenen durch einen vereinfachten Ausdruck für den Gitterstrom unterscheidet [DZ11b].

6.8.1 Gitterstrom

Gitter und Kathode können der Funktion nach als eine Diodenstrecke aufgefasst werden, das wird aus dem mechanischen Aufbau der Triode deutlich. Die Parameter weichen erwartungsgemäß stark von denen einer Röhrendiode ab, wie sie in Abschnitt 6.2.1 eingeführt wurde. Grundsätzlich sind aber in allen Aufbauten mit mehreren Elektroden stets Effekte wie Anlauf- oder Raumladungsströme zu beobachten [BW60].

Messungen zufolge ist der Gitterstrom einer Triode stark abhängig von der Gitterspannung, die Anodenspannung hingegen übt nur einen geringen Einfluss aus. Unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von der Anodenspannung ergibt sich als Vereinfachung eine Beziehung $I_g(U_g)$ gemäß

$$I_g \approx K_g \cdot U_g^\xi \quad (6.34)$$

mit der Gitterperveanz K_g und dem Exponenten ξ . Ein ähnlicher Ansatz ist sowohl in [CH10] spezifiziert als auch in der Literatur zu finden [BW60, RK51]. Gleichung (6.34) ähnelt dem Raumladungsgesetz nach Gleichung (6.5) mit geringfügig abweichendem Exponenten.

6.8.2 Vereinfachte Modellgleichungen

Unter Anwendung der Log/Exp-Kombination können die Gleichungen für Kathoden- und Gitterstrom um glatte Übergangsbereiche erweitert werden,

wie in Abschnitt 6.7.4 erläutert wurde. Es ergeben sich die Beziehungen

$$I_k = K \left(\log \left(1 + \exp \left(C_a \left(\frac{1}{\mu} U_a + U_g \right) \right) \right) \frac{1}{C_a} \right)^\gamma \quad (6.35)$$

$$I_g = K_g \left(\log \left(1 + \exp (C_g U_g) \right) \frac{1}{C_g} \right)^\xi + I_{g0}, \quad (6.36)$$

mit den Perveanzen K und K_g , den Exponenten γ und ξ sowie den Adaptionfaktoren C_a und C_g [DZ11b]. Als Adaptionfaktor für den Kathodenstrom empfiehlt sich weiterhin die Verwendung von Gleichung (6.28), vereinfachend ist aber auch die Annahme $C_a = \text{const}$ möglich. Die Gitterstromgleichung enthält mit I_{g0} eine im Wert kleine Konstante, die bei der Anpassung an Messdaten von Nutzen ist, ansonsten jedoch keine weitere praktische Bedeutung besitzt. Der Anodenstrom errechnet sich aus der Differenz der Gleichungen (6.35) und (6.36),

$$I_a = I_k - I_g. \quad (6.37)$$

Von Vorteil ist die Eigenschaft der stetigen Differenzierbarkeit, die eine gute Integration in numerische Simulatoren gestattet. Die Modellgleichungen in einer SPICE Implementierung befinden sich im Anhang A.

6.8.3 Limitierungen

Die vorgestellten Röhrenmodelle sind für einen vordefinierten Anwendungsbereich zugeschnitten und nur in diesem ist eine einwandfreie Funktion sichergestellt. Wird dieser verlassen, kann es zu falschen oder physikalisch unsinnigen Ergebnissen kommen. Diese Aussage gilt ebenso für viele andere Röhrenmodelle. Beispielsweise ist die Simulation einer Triode bei überhöhten Spannungen U_a und/oder U_g ohne weiteres möglich und ergibt entsprechend hohe Ströme, die in einer realen Schaltung die Zerstörung der Röhre zur Folge gehabt hätten.

Die alternativen Modellgleichungen, mit konstantem Faktor C_a wie auch mit $C_a(U_a)$, führen zu physikalisch falschen Ergebnissen, sobald die Anodenspannung einen Schwellenwert unterschreitet. Dieser liegt abhängig von den errechneten Parametern im Bereich von ca. 10 V bis 30 V. Da bei allen Standardschaltungen stets von einer Restspannung $U_a > 0$ auszugehen ist, kommt diese Abweichung kaum zum Tragen. Dies gilt auch im Übersteuerungsfall sowie für typische Schaltungen aus Gitarrenverstärkern. Diese Fehlfunktion

soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden: Für eine höhere positive Gitterspannung errechnet sich nach Gleichung (6.36) ein Strom I_g , der bei gleichzeitig sehr geringer Anodenspannung dem Betrage nach größer sein kann als I_k . Gemäß Gleichung (6.37) führt dies auf einen negativen Anodenstrom, was aus physikalischer Sicht natürlich unsinnig ist. Auf eine zusätzliche Einschränkung wird dennoch verzichtet, da diese den Einbau einer Unstetigkeitsstelle bedeuten würde. Bei dem in Abschnitt 6.7 vorgestellten Modell tritt dieser Fehler nicht auf.

6.9 Fitten der Parameter

Beim *Fitten* oder Anpassen werden freie Parameter einer Formel mit iterativen, numerischen Verfahren so angepasst, dass diese Formel eine vorgegebene Gestalt möglichst gut wiedergibt. Mit der Vorgabe von gemessenen Kennliniendaten können somit Gleichungen mit geeigneter Parametrierung angepasst werden. Dieses Vorhaben glückt dann besonders gut, wenn das Modell (gegeben durch eine Gleichung) das Wesen der Referenz (Vorgabe von Messdaten) gut erfasst. Nach vollzogenem Fitten liegt das Ergebnis dann in Form eines ermittelten Parametersatzes sowie einer Fehlerbetrachtung vor.

Die Parameterbestimmung wurde in dieser Arbeit mit der *surface fitting toolbox* von MATLAB durchgeführt. Dieses Werkzeug erlaubt die Verarbeitung räumlicher Funktionen, wie sie aus den Triodenmessungen vorliegen. Dank der grafischen Darstellung von Messdaten, angepasster Funktion und Abweichungsfehlern, erlaubt das Programm die visuelle Beurteilung der Ergebnisse. Die Parameteranpassung ist exemplarisch in Abbildung 6.7 dargestellt, gezeigt wird das Fitten des Kathodenstroms einer Triode vom Typ ECC82.

Sind genaue Messdaten für ein Röhrenexemplar verfügbar, so kann mit der Durchführung des Fittens ein individuell zugeschnittenes Modell erstellt werden. Mit dem in Kapitel 6.4 vorgestellten, automatisierten Messaufbau wurde eine Vielzahl an Röhrensystemen durchgemessen. Dabei wurden die gängigen Typen ECC83, ECC82 und ECC81 von unterschiedlichen Herstellern sowie in unterschiedlichem Zustand erfasst. Zu allen Messungen wurden daraufhin die passenden Parametersätze bestimmt. Tabellen mit den Ergebnissen sind im Anhang B zu finden.

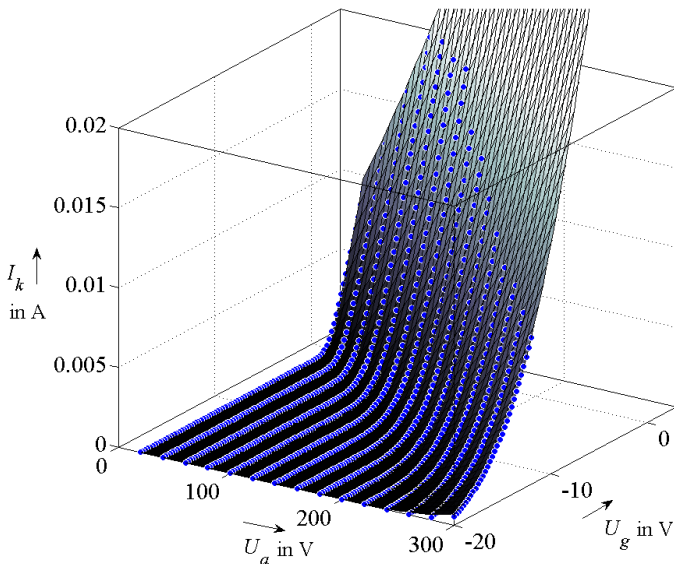


Abbildung 6.7: Fitten des Stroms I_k für eine Triode ECC82. Die blauen Punkte repräsentieren die Messwerte, die Fläche die darauf angepasste Funktion.

6.10 Vergleich der Modelle

Abbildung 6.8 bietet einen Vergleich mehrerer Röhrenmodelle. Dargestellt ist ein vollständiges Kennlinienfeld mit Gitter- und Anodenstrom für eine Triode vom Typ ECC81. Gezeigt sind

- das individuell angepasste neue Modell nach Abschnitt 6.7 (Modell 1),
- das individuell angepasste Modell nach Abschnitt 6.8 (Modell 2),
- das ebenfalls angepasste Modell von Cohen und Hélie (Abschnitt 6.6.3),
- das Koren-Modell (Abschnitt 6.6.2) mit den Parametern von [Kon98]
- sowie die diskreten Messpunkte der Referenzröhre.

Überprüft werden soll die Frage, welche der Modellgleichungen den Kennlinien von gemessenen Trioden am besten entspricht. Für einen fairen Vergleich werden alle Kurvenanpassungen mit der gleichen Sorgfalt ausgeführt.

Zunächst ist erkennbar, dass das Koren-Modell die Messdaten nicht so gut erfasst, wie es die anderen Modelle tun. Diese Tatsache ist nicht weiter verwunderlich, schließlich beruht dieses Modell als einziges auf Standardparametern. Alle anderen Modelle wurden individuell an die Messdaten angepasst und sollten somit eine höhere Übereinstimmung zu den Messpunkten aufweisen. Im Bereich $U_g > 0$ sind für I_a leichte Abweichungen des Modells nach Cohen und Hélie erkennbar, gleiches gilt für Modell 2 im Bereich kleiner Anodenströme. Dies geht aus der Darstellung $I_a(U_a)$, im Quadranten oben rechts, und aus der Darstellung $I_a(U_g)$ (oben links) hervor. Ebenfalls erkennbar sind Abweichungen im Gitterstrombereich. Lediglich Modell 1 ist in der Lage, die Abhängigkeit $I_g(U_a)$ nachzubilden. Für alle anderen Modelle ergibt sich ein von U_a unabhängiger Gitterstrom. Es kann also festgestellt werden, dass das Modell 1 zum besten Ergebnis führt. Die Messdaten, sowohl Anoden- wie auch Gitterstrom, werden treffend wiedergegeben.

Als zweites Beispiel wird das Kennlinienfeld einer Triode vom Typ ECC83 präsentiert, siehe Abbildung 6.9. Die Messungen sowie das Anpassen erfolgten unter denselben Bedingungen wie beim ersten Beispiel.

Die Erkenntnisse sind hier sehr ähnlich. Im Quadranten $I_a(U_a)$ stimmt das Modell nach Cohen und Hélie sehr gut mit den Messdaten überein. An einigen Stellen erzielt dieses Modell bessere Ergebnisse als die Kurven nach Modell 1 bzw. Modell 2. An anderen Stellen zeigen die Modelle 1 und 2 eine höhere Übereinstimmung mit den Messpunkten. Die Nachbildung des Gitterstroms wird von Modell 1 am besten bewältigt.

Es wird festgestellt, dass beide Röhrenmodelle ihren Zweck erfüllen und die Kennlinien realer Trioden in recht guter Näherung wiedergeben. Weitere Vergleiche werden in [DZH11, DZ11b] besprochen.

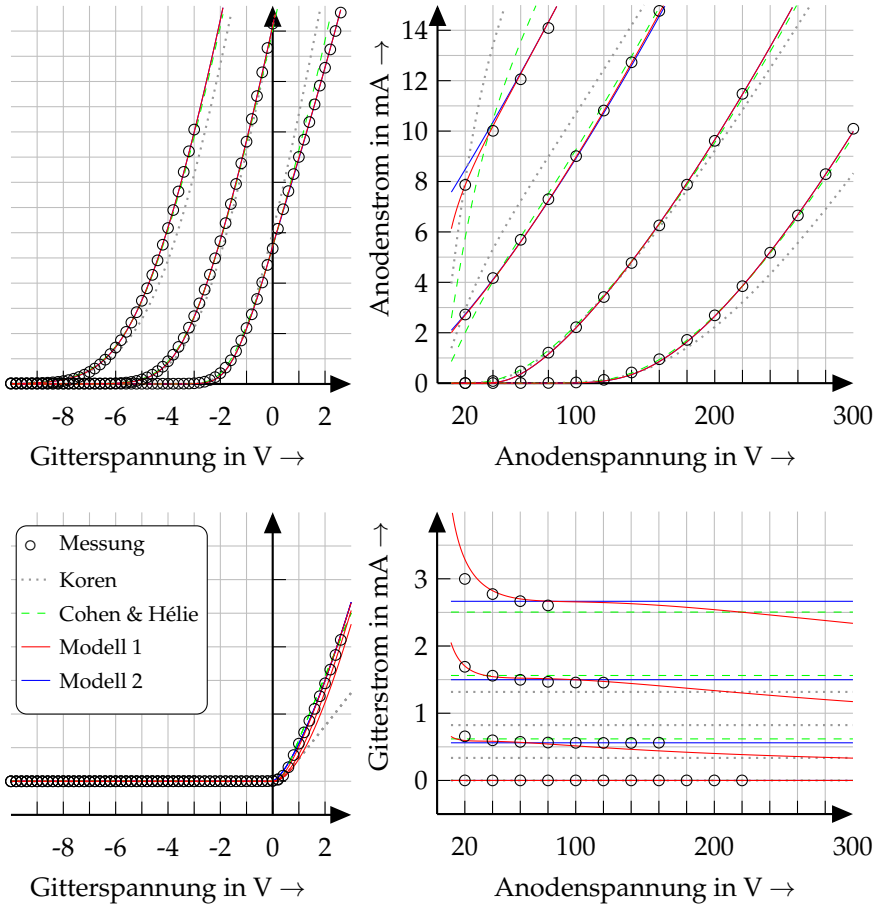


Abbildung 6.8: Vergleich verschiedener Triodenmodelle für eine Triode vom Typ ECC81 (Label: Tube Town).

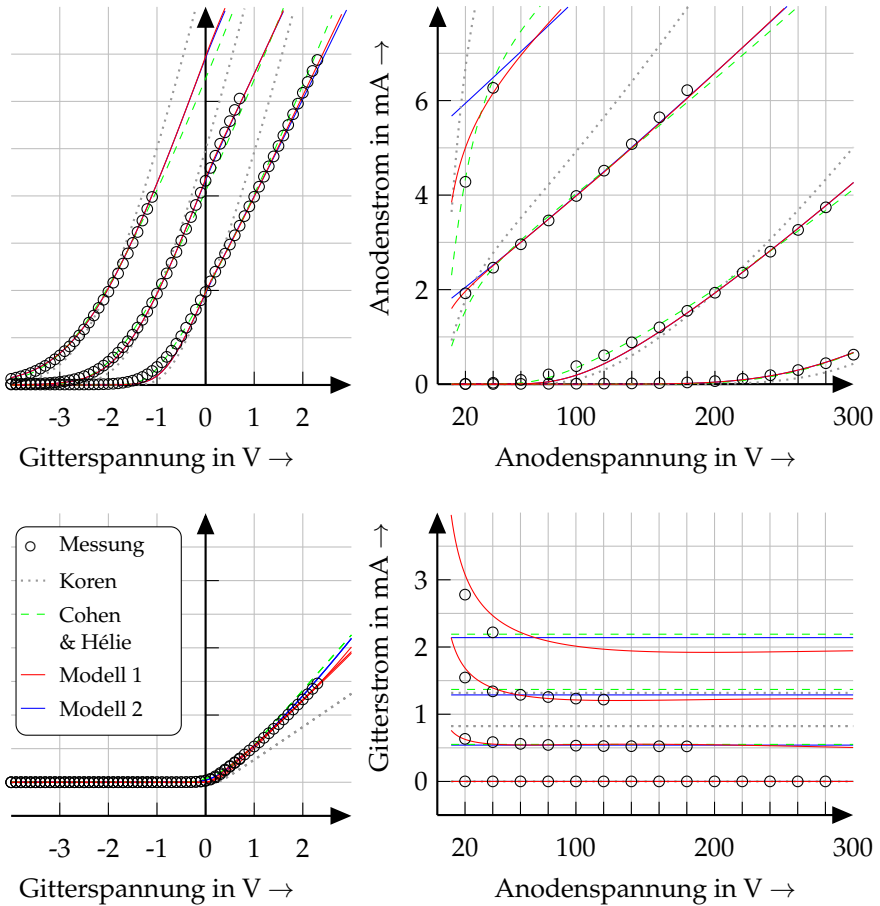


Abbildung 6.9: Vergleich verschiedener Triodenmodelle für eine Triode vom Typ ECC83 (Label: Groove Tubes).

6.11 Zusammenfassung des Kapitels

In den letzten 20 Jahren wurden verschiedene Röhrenmodelle zur Berechnung von Röhrenschaltungen mit Simulationswerkzeugen wie SPICE vorgeschlagen. Diese sind grundsätzlich auch in Echtzeitsimulationen nutzbar.

Die mathematische Beschreibung der nichtlinearen Kennlinie von Elektronenröhren basiert traditionell auf dem (idealisierenden) Raumladungsgesetz, welches auch Grundlage vieler SPICE Modelle ist. Das Gesetz ist maßgebend für die Dimensionierung von Röhrenschaltungen und prinzipiell auch geeignet, zeitabhängige Signalverläufe in einer Schaltung zu berechnen. Seine Gültigkeit beschränkt sich jedoch auf einen begrenzten Bereich der Kennlinie. Außerhalb dieses Bereichs ist die Beziehung nicht definiert und vermag das elektrische Verhalten realer Röhren nicht mehr korrekt nachzubilden.

Für die Simulation von übersteuerten Röhrenschaltungen werden spezielle Anforderungen gestellt. Ein wichtiger Punkt ist die Berücksichtigung des Gitterstroms. Der von der Kathode emittierte Strom verzweigt sich im Falle positiver Gitterspannungen in einen Anoden- und einen Gitterstrom, wodurch die Annahme der leistungslosen Steuerung ihre Gültigkeit verliert. Eine gute Näherung erzielt die Stromverteilungsformel nach Spangenberg, welche die Stromverzweigung als Funktion des Verhältnisses von Anoden- und Gitterspannung beschreibt.

In diesem Kapitel wurden die physikalischen Grundlagen sowie gemessene Kennlinien von Elektronenröhren vorgestellt. Neben der Diskussion verschiedener bekannter Röhrenmodelle wurden darüber hinaus auch zwei neue Triodenmodelle mit Gitterstrom präsentiert. Während die erste Modellgleichung auf der Stromverteilungsformel basiert, wird bei der zweiten Gleichung vereinfachend ein lediglich von der Gitterspannung abhängiger Gitterstrom angenommen. Die Glättung der Kennlinien wird mit einer Kombination aus Exponential- und Logarithmusfunktion erreicht, wie sie in ähnlicher Form auch im Röhrenmodell nach Koren zu finden ist. Es wurde dabei gezeigt, dass die beiden neu vorgestellten Modellgleichungen die Kennlinien realer Trioden auch im Randbereich in guter Übereinstimmung beschreiben. Sie sind somit für die Simulation von Gitarrenverstärkern geeignet.

7

Beurteilungskriterien für die Qualität einer Simulation

Die Simulation eines Gitarrenverstärkers oder eines Effektgerätes verfolgt das Ziel, den charakteristischen Sound eines solchen Gerätes so exakt wie möglich nachzubilden. Im Vordergrund steht die *klangliche Übereinstimmung*, eine subjektive Größe. Die Bewertung, ob eine Simulation gelungen ist, kann demzufolge eigentlich nur durch Hörvergleiche erfolgen. Die Erfahrung hat jedoch gezeigt, dass der Vergleich messbarer elektrischer Größen zumindest als ergänzendes Beurteilungskriterium herangezogen werden kann.

Bei der schaltungsbasierten Simulation wird versucht, das Verhalten der elektronischen Schaltung in mathematischer Form möglichst genau zu beschreiben. Dazu werden Ströme und Spannungen als virtuelle Größen definiert. Zeigen Simulationsmodell und Referenzschaltung, gemessen an einer geeigneten Position, ein elektrisch identisches Verhalten auf, so ist eine klangliche Ähnlichkeit sehr wahrscheinlich. Die inverse Aussage gilt mit großer Sicherheit: Sind die beobachteten Signale bei Simulation und Messung sehr unterschiedlich, so ist die klangliche Ähnlichkeit unwahrscheinlich¹.

Im Folgenden werden einige wichtige messtechnische Methoden vorgestellt, die für Ähnlichkeitsbetrachtungen herangezogen werden können. Alle Verfahren sind auf die Analyse von nichtlinearen und dynamischen Systemen ausgerichtet. Als Alternative zur Selbstprogrammierung sei auf das *Distortion Analysis Toolkit* verwiesen [Pak10]. Diese frei erhältliche Software bietet eine Sammlung diverser Testverfahren mit spezieller Eignung für die Analyse stark nichtlinearer Audioschaltungen.

¹ Dass diese Aussage jedoch nicht unumstritten ist, sei durch zwei Beispiele verdeutlicht: So zeigt die rege Diskussion um Hi-Fi-Verstärker in Transistor- oder Röhrentechnik, dass wahrgenommene Klangunterschiede nicht immer auch messtechnisch zu belegen sind. Ebenso können sich zwei Systeme klanglich entsprechen, obwohl die elektrischen Signale voneinander abweichen. Eine solche Beobachtung lässt sich beispielsweise durch den Maskierungseffekt sowie das begrenzte menschliche Hörvermögen begründen.

7.1 Analyse gewöhnlicher linearer Systeme

7.1.1 Frequenzgang

Bevor auf die Analyse allgemeiner Systeme eingegangen wird, ist zunächst der Sonderfall der linearen, zeitinvarianten Systeme zu betrachten. Ein ideales lineares und zeitinvariantes System ist, wie bekannt, eindeutig durch seine Übertragungsfunktion bestimmt. Aufgetragen über der Frequenz ergibt sich aus dieser der Frequenzgang. Von gleicher Bedeutung ist der Begriff *Lineare Verzerrung*, der jedoch in der Tontechnik zunehmend seltener gebraucht wird. Am Frequenzgang lässt sich ablesen, welche Dämpfung bzw. Verstärkung ein Signal beim Durchlaufen des Systems für verschiedene Frequenzen erfährt.

Messtechnisch lässt sich diese Größe auf mehrere Arten bestimmen [Mül08]. Die traditionellen Verfahren basieren auf der Bestimmung im Zeitbereich. Das Messobjekt wird von einem Generator mit Einzeltönen oder einem Sweep-Signal gespeist, das Ausgangssignal gemessen und schließlich zum bekannten Eingangssignal ins Verhältnis gesetzt. Modernere Verfahren arbeiten im Frequenzbereich. Mit Hilfe spezieller Testsignale wird die Impulsantwort des Messobjekts bestimmt, die dann zum komplexen Frequenzgang mit Betrag und Phase führt.

7.1.2 Klirrfaktor und nichtlineare Verzerrungen

Reale Systeme können nie ideal linear sein, sie sind stets mit einem geringen Anteil nichtlinearer Verzerrungen behaftet. Als Maß für Verzerrungen wird in der Tontechnik für gewöhnlich der *Klirrfaktor* (auch *Verzerrungsgehalt* genannt) oder aber der THD (Gesamte harmonische Verzerrung, von engl. *Total Harmonic Distortion*) bestimmt. Der Klirrfaktor k erfasst dabei den Anteil an Oberschwingungen, die einem Signal zugefügt sind und setzt diese in Relation zum Gesamtsignal. Die Definition lautet

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}} \quad (7.1)$$

mit den Effektivwerten von Grundschwingung (Spannung U_1) und Oberschwingungen (Spannungen U_2, U_3, \dots, U_n). Neben der Berücksichtigung aller Oberwellen bis zur Ordnung n , wie in Gleichung (7.1), ist zudem die

getrennte Angabe der Harmonischen üblich, so ist

$$k_i = \sqrt{\frac{U_i^2}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}, \quad i \geq 2 \quad (7.2)$$

der Anteil an Schwingungen der i -fachen Frequenz der Grundschwingung. Es gilt dabei $k = \sqrt{k_2^2 + k_3^2 + \dots + k_n^2}$.

Sehr ähnlich ist der THD definiert, der das Verhältnis aller Oberschwingungen zur Grundschwingung bestimmt. Es gilt dabei

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}{U_1}. \quad (7.3)$$

Die Angabe von Klirrfaktor und THD erfolgt als Prozentwert oder, heutzutage gebräuchlicher, in dB. Beide Maße sind als Kriterium für die Qualität von Verstärkern oder Übertragungssystemen geeignet, bei denen ein besonders verzerrungsarmer Signalpfad angestrebt wird. Umso geringer die Messwerte ausfallen, desto höher ist die Qualität. Die Angabe eines einzigen Zahlenwertes („Klirrfaktor gesamt kleiner als“) ist daher vollkommen ausreichend.

7.2 Analyse nichtlinearer Systeme

Die Bewertung von Geräten, bei denen Verzerrungen vorsätzlich hervorgerufen werden, erfordert eine spezialisierte Analyse. Von Bedeutung ist nicht der Nachweis der Existenz zugesetzter Oberwellen, sondern Angaben über deren Verteilung und Frequenzabhängigkeit.

7.2.1 Transientenanalyse

Bei der Transientenanalyse wird das zeitliche Verhalten eines Systems als Antwort auf eine definierte Anregung betrachtet. Sie gibt Aufschluss über Ein- und Ausschwingverhalten bei sprunghafter Änderung des Eingangssignals, aber auch über den Grad der Verzerrungen bei einem eingeschwungenen System. Die Transientenanalyse besitzt somit eine hohe Aussagekraft wenn es um die Untersuchung dynamischer Systeme geht.

Sinusanregung

Im einfachsten Fall wird als Stimulus ein Sinussignal der Frequenz f gewählt. Bei linearen Systemen ist die Aussagekraft gering, da sich das Ausgangssignal lediglich in Amplitude und Phase von der Eingangsschwingung unterscheidet, es jedoch weiterhin sinusförmig ist. Bei stark nichtlinearen Systemen hingegen werden dem Signal höherfrequente Anteile zugemischt. Das Ausgangssignal verliert seine sinusförmige Gestalt, es erhält steile Flanken oder Amplitudensprünge. Die charakteristische Verformung ist als Kriterium für die Ähnlichkeitsbetrachtung geeignet, wichtig sind allerdings die Angabe von Amplitude und Frequenz des Anregungssignals. Zu beachten ist, dass die Betrachtung dieser *Wellenform* stets nur eine „Momentaufnahme“ des Systems zeigt und die nichtlineare Schaltung für genau eine Amplitude und eine Frequenz charakterisiert.

Die Sinusanregung ist praktisch von hoher Bedeutung, da sich die Generierung des Anregungssignals und die Messung als besonders aufwandsarm erweisen.

Anregung mit Sinus-Bursts

Etwas eleganter ist die Anregung mit Sinussignalen, deren Amplitude zusätzlich verändert wird. Von hohem Stellenwert sind Testsequenzen mit einer sprunghaft einsetzenden Schwingung, deren Einhüllende im weiteren Verlauf exponentiell abfällt. Diese bilden näherungsweise eine perkussive Anregung nach, wie sie beim Anschlag einer Gitarrensaite gegeben ist. Ebenfalls üblich sind Testsignale mit abwechselnd ansteigender und abfallender Amplitude, beispielsweise mit einer gaußförmigen Hüllkurve. Abbildung 7.1 zeigt exemplarisch einen exponentiell abfallenden und einen gaußförmigen Burst mit einer 1 kHz-Schwingung.

Mit diesen Testsignalen ist die Charakterisierung für einen Amplitudenbereich bei einer festen Frequenz möglich. Neben dem Vergleich der Zeitsignale sind Burst-Signale auch für die Aufnahme von u_{ein}/u_{aus} -Kennlinien geeignet, welche ebenfalls für Vergleiche herangezogen werden können [MGZ02].

Wird das Testsignal periodisch wiederholt, sind zudem Informationen über das Dynamikverhalten zu gewinnen. Schmutzeffekte, wie die typische Verschiebung eines Arbeitspunktes durch Ladevorgänge, sind bei Anregung mit Burst-Signalen erfassbar.

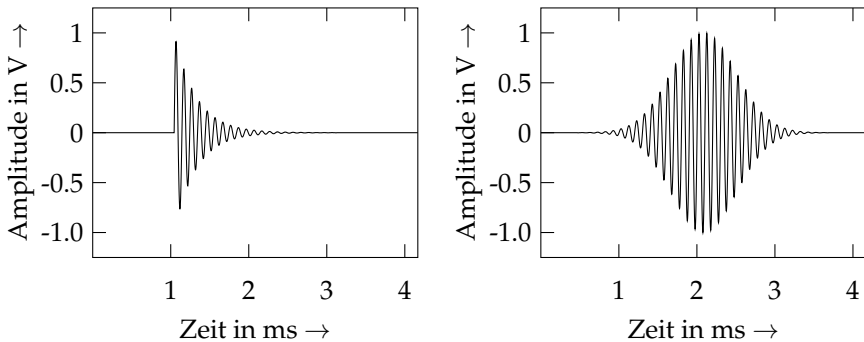


Abbildung 7.1: Testsignale für die Burst-Anregung.

7.2.2 Frequenzabhängigkeit der Verzerrungen

Klirrspektrum für eine Frequenz

Die Darstellung der Harmonischen über der Frequenz wird in der Regel als *Klirrspektrum* bezeichnet. Im einfachsten Fall wird erneut die sinusförmige, monofrequente Anregung mit der Grundfrequenz f betrachtet. Das Ausgangssignal wird mit einer FFT-Analyse in die spektralen Komponenten zerlegt. Das Spektrum zeigt dann, neben dem Peak bei der Grundfrequenz, auch sämtliche hinzugemischten Oberwellen.

Die Harmonischen erheben sich in der Gestalt eines Kammes bei den Vielfachen der Grundfrequenz $2 \cdot f, 3 \cdot f, \dots, n \cdot f$ aus dem Messrauschen. Üblicherweise erfolgt die Darstellung über einer linearen Frequenzachse. Die Pegel der einzelnen Komponenten sind so besonders leicht abzulesen. Die tatsächliche Verstärkung des Systems ist für die Untersuchung des Klirrspektrums ohne Belang. Die wichtige Information steckt im Verhältnis der Harmonischen bezogen auf die Grundfrequenz. Üblich ist daher eine normierte Darstellung des Spektrums, wobei der Pegel der Grundfrequenz auf 0 dB (entspricht 100 %) festgelegt wird. Abbildung 7.2 zeigt als Beispiel das Klirrspektrum eines Systems mit mäßiger Nichtlinearität.

Zu beachten ist, dass sich diese Darstellung auf lediglich eine Grundfrequenz und eine Anregungsamplitude bezieht. Darüber hinaus lassen sich aus dem Klirrspektrum keine Aussagen über das dynamische Verhalten des Messobjekts ableiten, erfasst werden die statischen, nichtlinearen Verzerrungen.

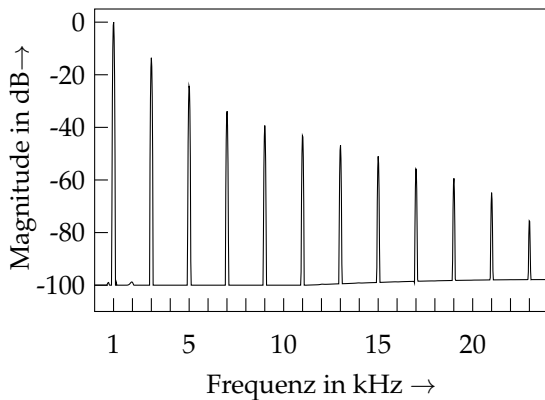


Abbildung 7.2: FFT-Klirrspektrum mit linearer Frequenzachse.

Klirrspektrum für einen Frequenzbereich

Von höherer Aussagekraft, wenn auch messtechnisch aufwendiger, ist die Auswertung über einem Frequenzband, idealerweise dem gesamten Audiospektrum von 20 Hz bis 20 kHz. Die Durchführung mit Einzeltönen (sogenanntes *Stepped-Sine-Verfahren*) gestaltet sich jedoch als äußerst zeitfordernd, sofern eine gute Frequenzauflösung gewünscht ist.

Eine elegante Alternative wurde von Farina vorgeschlagen [Far00]. Sein *log-Sweep*-Ansatz basiert auf der Anregung mit Sweep-Signalen, wie sie auch zur Bestimmung von Frequenzgängen üblich sind.

Als Einstieg wird hier die Vermessung linearer Systeme mit dieser Methode vorgestellt. Das Testsignal besteht aus einem logarithmischen Sweep, also einem Sinussignal dessen Frequenz exponentiell mit der Zeit ansteigt. Der Sweep gehorcht der Formel

$$x(t) = \sin \left(\frac{\omega_1 T_S}{\ln(\frac{\omega_2}{\omega_1})} \left(\exp \left(\frac{t}{T_S} \ln \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right) - 1 \right) \right) \quad (7.4)$$

mit der Startfrequenz $\omega_1 = 2\pi f_1$, der Stoppfrequenz $\omega_2 = 2\pi f_2$ sowie der zeitlichen Ausdehnung T_S . Die Amplitude ist konstant über der Zeit, die spektrale Energiedichte nimmt jedoch mit Erhöhung der Frequenz ab.

Neben diesem Anregungssignal ist ein zu $x(t)$ „inverses“ Signal $x^{-1}(t)$ zu berechnen, welches das Frequenzband in zeitlicher Umkehr durchläuft. Zusätzlich ist die Signalamplitude frequenzabhängig gewichtet, um die Energieverteilung von $x(t)$ zu kompensieren. Das Faltungsprodukt

$$x(t) * x^{-1}(t) \approx \delta(t - T_S). \quad (7.5)$$

führt dann auf eine gute Näherung des Dirac-Impulses, verschoben um die Zeit T_S . Die zugehörige Fouriertransformierte führt somit auf einen konstanten Betragsfrequenzgang. Diese Eigenschaft wird nun für messtechnische Bestimmung von Impulsantwort und Frequenzgang eines unbekanntes Systems ausgenutzt. Dazu wird das Messobjekt mit dem Testsignal $x(t)$ angeregt, das Ausgangssignal $y(t)$ wird aufgezeichnet. Es folgt eine Nachverarbeitung bei der die Entfaltung

$$y(t) * x^{-1}(t) = h(t) * \underbrace{x(t) * x^{-1}(t)}_{\delta(t-T_S)} \quad (7.6)$$

$$h(t - T_S) = y(t) * x^{-1}(t) \quad (7.7)$$

direkt auf die Impulsantwort des unbekanntes Systems führt.

Wird ein nichtlineares System mit diesem Verfahren gemessen, ergeben sich in $h(t)$ weitere Spitzen, die aus den harmonischen Verzerrungsprodukten resultieren. Diese Tatsache lässt sich direkt mit der Definition des Testsignals begründen, welches mit einer konstanten Anzahl an Oktaven pro Zeiteinheit ansteigt. Die durch die Nichtlinearität hervorgerufenen Frequenzanteile ($2 \cdot f$, $3 \cdot f$ und folgende) werden demnach zu einem früheren Zeitpunkt gemessen, als jene Anteile der gleichen Frequenzen, die zum linearen Teil des Systems gehören. Dieser Zusammenhang ist grafisch in Abbildung 7.3 dargestellt. Durch die Faltungsoperation mit dem inversen Signal erscheinen sie auf eine negative Zeit projiziert als eigenständige Impulsantworten. Diese sogenannten *harmonischen* Impulsantworten (HIR) liegen links von der eigentlichen Impulsantwort, also bei negativen Zeiten, siehe Abbildung 7.4(a). Die Position der HIR zur i -ten Komponente lässt sich mit

$$t_{\text{HIR}(i)} = t_{\text{lin}} - T_S \frac{\log(i)}{\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \quad (7.8)$$

genau vorherbestimmen. Dabei ist t_{lin} die Position der zur Grundwelle gehörenden Impulsantwort. Wie für die Grundwelle auch, lassen sich die Klirrkompenten durch eine FFT-Analyse in hochaufgelöster Form ermitteln. Mit

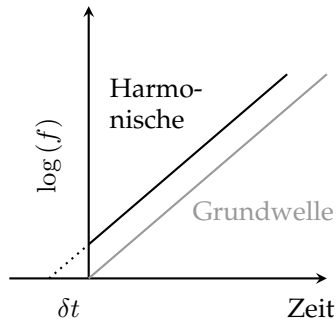


Abbildung 7.3: Entstehung und Detektion harmonischer Komponenten bei der Sweep-Messung (Prinzip).

der Kenntnis der entsprechenden Positionen, Gleichung (7.8), werden diese separat ausgeschnitten, gefenstert und dann transformiert. Die harmonischen Spektren sind dann in ihrer Frequenz zu verschieben, so dass zueinander gehörende Frequenzen in der grafischen Darstellung übereinander stehen. Entsprechend zeigt der vertikale Schnitt für einen Wert der Grundfrequenz f die Verzerrungsanteile von $2 \cdot f$ bei der 2. Harmonischen, $3 \cdot f$ bei der 3. Harmonischen und so weiter, siehe Abbildung 7.4(b). Dargestellt sind stets die Harmonischen H_i . Die zugeordneten Klirrkompenten k_i lassen sich durch Differenzbildung mit der Grundwelle daraus leicht ablesen.

Die wichtige Information steckt auch bei dieser Darstellung im Verhältnis der Harmonischen bezogen auf die Grundfrequenz. Aus Gründen der Übersichtlichkeit erfolgt die grafische Darstellung daher in dieser Arbeit in einer normierten und geglätteten Form. Als Bezugspunkt wird, sofern nicht anders angegeben, die Grundfrequenz bei 1 kHz gewählt und auf den Wert 0 dB festgelegt. Die Glättung erfolgt nach einem von Hatziantoniou und Mourjopoulos vorgestellten Prinzip [HM00]. Das Ergebnis kann als eine Art „Fingerabdruck“ des nichtlinearen Systems interpretiert werden [DHMZ09]. Diese Charakterisierung eignet sich vorzüglich zum Vergleich verschiedener Systeme, also auch für den Vergleich zwischen Referenzmessung und Simulation.

Zu beachten ist wiederum, dass die Methode lediglich Aussagen über die statischen Verzerrungen zulässt, und zwar für genau eine Eingangsamplitude pro Messung. Dynamische Effekte werden nicht erfasst. Weitere Informationen zur Anwendung dieses Verfahrens sind im Originalaufsatz [Far00] sowie in [Mül08] zu finden.

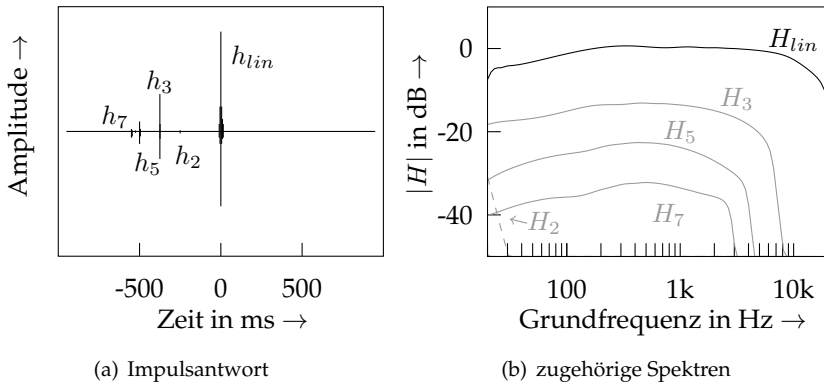


Abbildung 7.4: Impulsantwort mit linearem Anteil und zeitlich versetzten Klirranschüben und daraus ermittelte Spektren bei der log-Sweep-Methode.

7.3 Weitere Kriterien

Alle bisher vorgestellten Verfahren bezwecken die Beurteilung der Übereinstimmung zwischen virtuellem Modell und Schaltungsrealität. Bei den nachfolgenden Kriterien, deren Erfüllung eine Selbstverständlichkeit darstellt, steht die Funktion im Vordergrund.

7.3.1 Aliasing

Aliasing tritt immer dann auf, wenn das Abtasttheorem in einem digitalen System verletzt wird. Der Fehler beruht auf der „Rückfaltung“ hochfrequenter Signalanteile, die als falsche Töne im Spektrum hörbar werden. Um Signalverfälschungen durch Alias-Effekte zu unterdrücken, ist eine Bandbegrenzung auf maximal die halbe Abtastfrequenz sicherzustellen.

Bei linearen Systemen spielen Alias-Effekte eine untergeordnete Rolle, da sie durch entsprechende Tiefpass-Filter wirkungsvoll unterdrückt werden können. Die zu betrachtenden nichtlinearen Systeme zeichnen sich jedoch durch die (erwünschte) hochgradige Generierung von Obertönen aus, welche eine Verbreiterung des Spektrums zur Folge haben. Eine verzerrende Stufe mit einem breiten Spektrum kann also das Abtasttheorem durchaus verletzen und

hörbare Alias-Fehler hervorrufen. Für gewöhnlich wird das Aliasing-Problem durch eine Überabtastung umgangen. Mit der Erhöhung der Abtastfrequenz f_A erhöht sich gleichzeitig auch die Spiegelfrequenz.

Der Simulation von Verzerrerschaltungen kommt zu Gute, dass der Tonumfang einer E-Gitarre nur bis etwa 1,3 kHz reicht (Instrument mit 24 Bündlen bei normaler Stimmung und Spielweise). Bei einer typischen Abtastfrequenz von $f_A = 48$ kHz werden also erst Harmonische sehr hoher Ordnungen zu Kandidaten für Alias-Effekte. Darüber hinaus ist die Tatsache zu beachten, dass am Ende der Signalkette in der Regel der Gitarrenlautsprecher sitzt, der eine ausgeprägte Tiefpasscharakteristik aufweist. Dieses wurde in Abschnitt 3.1 bereits erläutert. Die zugemischten Harmonischen werden also durch den Lautsprecher zunehmend gedämpft und fallen so geringer ins Gewicht.

Dennoch ist das Potential für Alias-Fehler keinesfalls zu ignorieren. Trotz der angeführten Faktoren können und werden diese bei gewöhnlicher Nyquist-Abtastung auftreten. Hörbare Alias-Fehler werden vom Musiker als nicht zumutbar empfunden und sind daher zu vermeiden.

Für die Untersuchung auf störende Alias-Effekte hält das schon angesprochene *Distortion Analysis Toolkit* ein eigenes Analyseprogramm bereit. Auch die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden sind in der Lage, den Einfluss des Effekts nachzuweisen und zu beurteilen.

7.3.2 Artefakte und Performanz

Ein wichtiger Punkt ist auch die Performanz des Simulationsalgorithmus. Als Kriterium ist die zuverlässige Abarbeitung der Programmschritte für alle Anwendungsszenarien zu setzen. Aus Sicht des Anwenders ist darüber hinaus natürlich eine möglichst geringe Prozessorbeltastung erwünscht, dieser Wunsch bleibt an dieser Stelle jedoch unberücksichtigt.

Der Echtzeitalgorithmus, mit einem oder mehreren nichtlinearen Zustandsraummodellen, weist typischerweise die folgende Eigenschaft auf: Die Rechenlast unterliegt Schwankungen, ist also nicht gleichmäßig verteilt. Dies ist durch die iterativen Lösungsverfahren zu begründen, die abhängig von der Beschaffenheit des Eingangssignals ggf. unterschiedlich viele Iterationsschritte benötigen. Eine Rolle spielt hauptsächlich die Signalamplitude, aber auch die Frequenz. Reicht die Anzahl der verfügbaren Rechenzyklen nicht aus, kommt es zu falschen oder abgebrochenen Lösungen. Eine Folge sind hörbare Artefakte.

Gleiches gilt für Zusatzoperationen, die neben dem Hauptprogramm abzuarbeiten sind. Die mehrfach thematisierte Neuberechnung von Koeffizienten

als Folge einer Parameteränderung stellt in der Regel einen erheblichen Mehraufwand dar, der in der zeitkritischen Signalverarbeitung nicht zu Fehlern führen darf.

7.4 Ursachen für Abweichungen zur Referenzschaltung

In vielen Fällen sind die Bauteilwerte der Originalschaltung nicht genau zu ermitteln, da deren Erfassung in einer Schaltung nicht immer möglich ist. Den Einsatz eines Lötkolbens wird man vermeiden, um bei Neugeräten eine bestehende Garantie nicht zu verletzen oder aber bei sehr alten Geräten keine Wertminderung zu verursachen. In diesen Fällen können die Simulationen lediglich mit den Nominalwerten erfolgen, was aufgrund der Bauteiltoleranzen zu Abweichungen führt. Diese Auswirkungen lassen sich mit einer Monte-Carlo-Simulation verdeutlichen, siehe Abbildung 7.5. Gezeigt sind Frequenzgänge der in Kapitel 4.6 bereits besprochenen Klangregelung unter Berücksichtigung üblicher Toleranzen. Wie der Grafik zu entnehmen ist, führen Toleranzwerte von 10 % bereits zu erheblichen Unterschieden.

Die Auswirkungen von Bauteiltoleranzen in Bezug auf nichtlineare Systeme demonstrieren die Abbildungen 7.6 und 7.7. Gegenstand dieser Monte-Carlo-Simulation ist das simple Filter mit Diodenbegrenzung, welches in Kapitel 5.5 ausführlich vorgestellt wurde. Abbildung 7.6 zeigt die Wellenformen der Ausgangssignale. Sind die Abweichungen bei einer Toleranz von 1 % noch sehr gering, so ergeben sich bei einer Toleranz von 10 % deutliche Änderungen in Amplitude und Wellenform. Abbildung 7.7 zeigt die Auswertung der harmonischen Anteile bei einer gering bemessenen Übersteuerung mit $u_{ein} = 2\text{ V}$. Auch hier machen sich die Auswirkungen der Bauteiltoleranzen in Form einer Aufweitung bemerkbar.

7.5 Höreindruck

Die vorgestellten Werkzeuge sind geeignet, um Vergleiche zwischen virtuellem Modell und realer Referenz anhand von messbaren Größen anzustellen. Eine gemessene Übereinstimmung lässt auf eine klangliche Entsprechung schließen. Insbesondere während der Entwicklungsphase ist die Nutzung dieser Werkzeuge hilfreich.

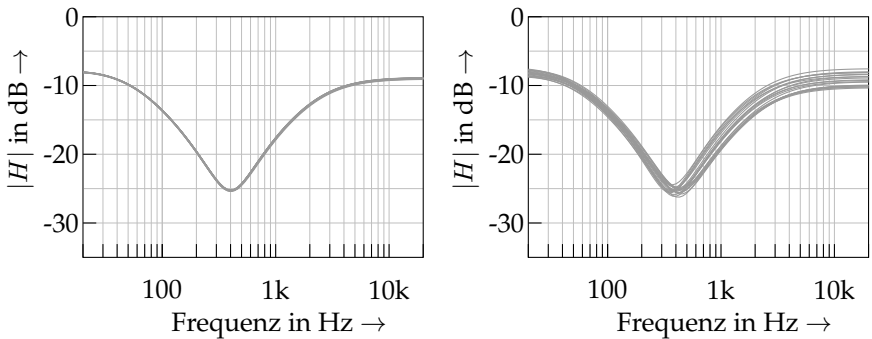


Abbildung 7.5: Monte-Carlo-Simulation des Tone Stacks für 1% Toleranz (links) und 10% Toleranz (rechts).

Dennoch ist das überzeugendste Argument immer noch der Hörvergleich, der nach Fertigstellung des Modells durchzuführen ist. Vergleiche informeller Natur können dabei ausreichend sein, sofern die Testpersonen genügend Erfahrung mit der Thematik haben. Für den Anwender, der ein Produkt kaufen möchte, ist letztlich nur der Klang ausschlaggebend.

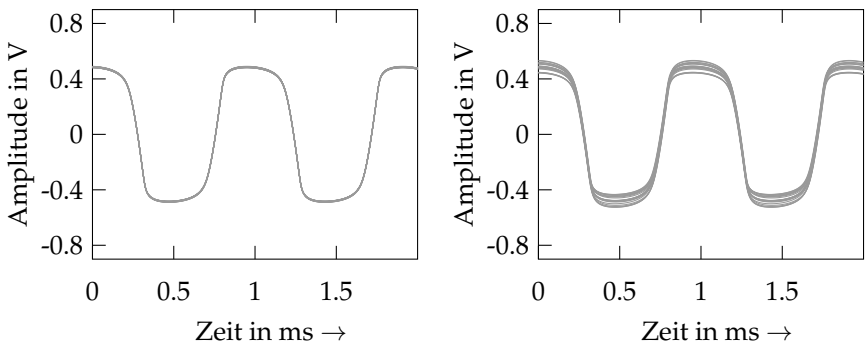


Abbildung 7.6: Monte-Carlo-Simulation des diodenbegrenzten RC-Filters für 1% Toleranz (links) und 10% Toleranz (rechts). Anregung mit 1 V Amplitude.

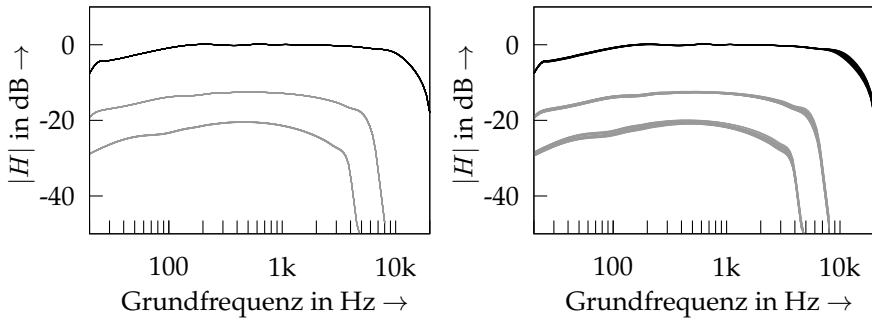


Abbildung 7.7: Monte-Carlo-Simulation des diodenbegrenzten RC-Filters, 1 % Toleranz (links) und 10 % Toleranz (rechts). Frequenzgang (schwarz) sowie 3. und 5. Harmonische (grau) für $u_{ein} = 2\text{ V}$.

7.6 Zusammenfassung des Kapitels

Als Beurteilungskriterium für eine Klangähnlichkeit ist, neben dem subjektiven Hörvergleich, auch die Gegenüberstellung messbarer elektrischer Größen geeignet. Liegt ein elektrisch identisches Verhalten zwischen virtuellem Modell und Referenzschaltung vor, ist auch die klangliche Übereinstimmung sehr wahrscheinlich. Abweichende Simulationsergebnisse lassen sich oft auf Bauteiltoleranzen zurückführen.

Für stark nichtlineare Audioschaltungen ist der Nachweis auftretender Oberwellen allein in der Regel nicht ausreichend. Klangentscheidend ist deren Verteilung und Frequenzabhängigkeit.

Aufschluß über die dynamischen Eigenschaften geben die charakteristische Wellenform sowie die Transientenbetrachtung bei Anregung mit Burst-Signalen. Aussagen über die statischen Verzerrungen können anhand von Klirrspektren getroffen werden, die für eine Anregungsfrequenz oder für ein ganzes Frequenzband zu ermitteln sind.

8

Anwendungen

In Kapitel 5 wurde der erweiterte Zustandsraum als geeignete Methode zur Modellierung nichtlinearer Schaltungen vorgestellt. Zur Überprüfung dieses allgemeinen Ansatzes werden in diesem Kapitel einige relevante Schaltungen analysiert und in eine Simulation überführt. Vorgestellt werden (Teil-)Schaltungen, wie sie in dieser oder ähnlicher Form in typischen Verstärkern bzw. Effektgeräten für E-Gitarren zu finden sind. Jedes Simulationsergebnis wird mit den Messdaten aus der realen Schaltung verglichen und anschließend bewertet.

8.1 Verzerrung durch Halbleiter

Im Vorfeld wurde bereits eine einfache Verzerrerschaltung mit einem Diodennetzwerk besprochen, siehe Abschnitt 5.5. Nachfolgend werden zwei weitere Schaltungen vorgestellt, bei denen Halbleiter zur Erzeugung von Verzerrungen genutzt werden.

8.1.1 Beispiel: JCM900 Vorstufe

Ein gutes Beispiel für die Verzerrung mittels Dioden ist im Schaltplan des Verstärkers JCM900 der Firma MARSHALL zu finden [Doy93], siehe Abbildung 8.1. Die Bauteile sind in Tabelle 8.1 spezifiziert. In diesem Fall ist ein Netzwerk mit vier Leuchtdioden in den Gegenkopplungszweig eines Operationsverstärkers (OPA) eingefügt. Bedingt durch die Durchlass-Spannung $U_F \approx 1,6\text{ V}$ der roten LEDs wird damit das Ausgangssignal in der Amplitude auf etwa $\pm 3,2\text{ V}$ begrenzt. Mit dem *Gain*-Potentiometer R_3 kann dabei der Grad der Verzerrung eingestellt werden. Im abgebildeten Schaltplan wird dies durch den Parameter α verdeutlicht.

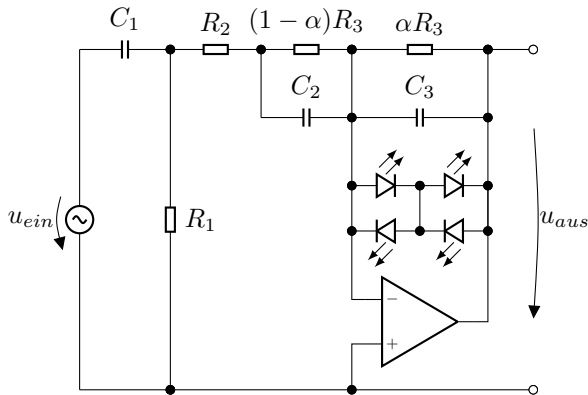


Abbildung 8.1: Auszug aus der Vorstufe des Marshall Verstärkers.

Tabelle 8.1: Bauteilwerte der Vorstufenschaltung.

R_1	22 k Ω	R_3	220 k Ω	C_2	1 nF
R_2	12 k Ω	C_1	47 nF	C_3	47 pF

Schaltungsanalyse

Im ersten Analyseschritt wird die mit dieser Schaltung maximal erreichbare Verstärkung abgeschätzt. Diese beträgt

$$V \approx 20 \log \left(\frac{R_3}{R_2} \right) \approx 25 \text{ dB} \quad (8.1)$$

und ist damit deutlich kleiner als der *open loop gain* des verwendeten OPAs, der mit 100 dB anzugeben ist. Außerdem ist die Amplitude des Ausgangssignals klein in Relation zur Versorgungsspannung. Aus diesen Gründen ist es legitim, den Operationsverstärker als ideal anzunehmen, was die Berechnung der Schaltung erheblich vereinfacht.

Beschreibung der Nichtlinearität

Die Nichtlinearität ist gegeben durch die vier roten LEDs, die in Antiparallelschaltung im Gegenkopplungszweig des OPA eingefügt sind. Der

Strom i_{D1} durch eine Diode im Durchlassbereich wird bei gegebener Spannung U_F entsprechend der bereits vorgestellten Shockley-Gleichung berechnet. Es ist

$$i_{D1} = I_S \left(\exp \left(\frac{U_F}{\eta U_t} \right) - 1 \right), \quad (8.2)$$

mit dem Sättigungssperrstrom I_S , der Temperaturspannung U_t und dem Emissionskoeffizienten η . Die parasitäre Kapazität sowie der Reihenwiderstand des pn-Übergangs werden dabei vernachlässigt.

Messungen zufolge haben sich diese Kennwerte als geeignet erwiesen: $I_S = 6,5 \times 10^{-20}$ A, $U_t = 25,3$ mV und $\eta = 1,68$. Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer solchen Leuchtdiode ist in Abbildung 8.2 (links) dargestellt.

Unter der Annahme, dass alle Dioden einen identischen Kennlinienverlauf aufweisen, lassen sich diese elegant zu einem geschlossenen Ausdruck zusammenfassen. Aus Symmetriegründen ist der Spannungsabfall über einer Diode $\frac{1}{2}u_{C3}$. Für den Strom i_D , der in das Netzwerk hineinfließt, gilt somit

$$\begin{aligned} i = i_D &= I_S \left(\exp \left(\frac{u_{C3}}{2\eta U_t} \right) - 1 \right) - I_S \left(\exp \left(\frac{-u_{C3}}{2\eta U_t} \right) - 1 \right) \\ &= 2I_S \sinh \left(\frac{u_{C3}}{2\eta U_t} \right). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Durch die Zusammenfassung der Leuchtdioden ergibt sich die Ordnung der Nichtlinearität zu $q = 1$.

Korrektur des Potentiometer-Wertes

Das *Gain*-Potentiometer im Original-Verstärker weist näherungsweise einen S-förmigen Widerstandsverlauf auf. Für die korrekte Simulation muss der Parameter α entsprechend korrigiert werden. Die Zuweisung $\textit{Gain} \rightarrow \alpha$ basiert auf punktwisen Messungen und ist in Abbildung 8.2 (rechts) dargestellt.

Zustandsraumbeschreibung

Die Analyse der Schaltung ist unproblematisch und wird entsprechend der Vorgehensweise aus Kapitel 5.1 durchgeführt. Die Ordnung des Systems ist entsprechend der Anzahl der Kondensatoren $l = 3$. Die Matrizen der

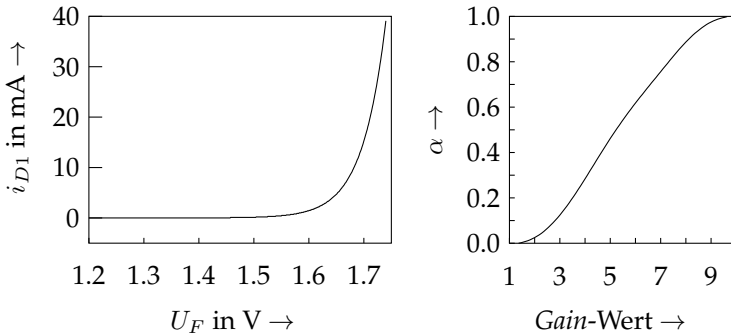


Abbildung 8.2: Links: I - U Transferfunktion für eine rote LED. Rechts: Beziehung zwischen Gain und α (interpoliert).

Zustandsgleichung sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1+R_2}{C_1 R_1 R_2} & -\frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{R_2+(1-\alpha)R_3}{(1-\alpha)R_2 R_3 C_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{\alpha R_3 C_3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{R_1+R_2}{C_1 R_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_3 R_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = (u_{C_1} \quad u_{C_2} \quad u_{C_3})^T$.

Das Bestimmen der Ausgangsspannung gestaltet sich einfach, da diese gleich der Spannung über der Rückführung ist,

$$y = -u_{C_3}. \quad (8.5)$$

Für die Ausgangsgleichung gilt daher $\mathbf{d} = (0 \quad 0 \quad -1)$, $e = 0$ und $f = 0$. Des Weiteren wird der Strom durch die Dioden ebenfalls durch die Spannung über C_3 bestimmt, $\mathbf{g} = (0 \quad 0 \quad 1)$, $h = 0$ und $k = 0$.

Diskretisierung

Als Diskretisierungsmethode wird die Trapezregel gewählt. Die Überführung in ein äquivalentes, zeitdiskretes Zustandsraummodell ist dann mit den entsprechenden Transformationsregeln durchzuführen, siehe Gleichungen (4.45) bis (4.48) sowie (5.7) bis (5.11). Bei diesem Schritt treten erwartungsgemäß keine weiteren Schwierigkeiten auf, dennoch wird nachfolgend eine alternative Realisierung vorgeschlagen.

Diskretisierung mit effizientem Parameterumgang

Die Abhängigkeit von Parameter α bringt einen erheblichen Rechenaufwand im Diskretisierungsschritt mit sich. Mit jeder Änderung müssen die Koeffizienten des diskreten Systems neu berechnet werden. Insbesondere die Matrixinversion $(\frac{2}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ erscheint dabei unattraktiv. Glücklicherweise weist die Systemmatrix \mathbf{A} eine spezielle Struktur auf und kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{A} = - \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\alpha)R_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha R_3} \end{pmatrix} + \frac{1}{R_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 0) \right).$$

Für die Matrixinversion kann somit auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} \beta_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^{-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{R_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 0) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix} \quad (8.6) \end{aligned}$$

mit den Termen

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{R_1 T}{2C_1 R_1 + T}, & \beta_2 &= \frac{(1-\alpha)R_3 T}{2(1-\alpha)C_2 R_3 + T} \\ \beta_3 &= \frac{\alpha R_3 T}{2\alpha C_3 R_3 + T}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun wunderbar unter Anwendung der Sherman-Morrison Formel (auch bekannt als Matrix-Inversions-Lemma) invertieren,

$$\left(\frac{2}{T}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{R_2 + \beta_1 + \beta_2} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 C_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 C_3 \end{pmatrix}.$$

Unter Vermeidung der Inversion lassen sich nun überschaubare Ausdrücke für die Koeffizienten angeben. Für die Zustandsgleichung sind das

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{2C_1 R_1 - T}{2C_1 R_1 + T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(1-\alpha)C_2 R_3 - T}{2(1-\alpha)C_2 R_3 + T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\alpha C_3 R_3 - T}{2\alpha C_3 R_3 + T} \end{pmatrix} - \frac{4}{R_1 T \cdot (R_2 + \beta_1 + \beta_2)} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 C_1 & \beta_2 C_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = -\frac{2}{R_1 \cdot (R_2 + \beta_1 + \beta_2)} \begin{pmatrix} \beta_1 \cdot (R_1 + R_2 + \beta_2) \\ \beta_2 \cdot (R_1 - \beta_1) \\ \beta_3 \cdot (R_1 - \beta_1) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

für die Ausgangsgleichung

$$\bar{\mathbf{d}} = \frac{2}{T} \cdot \left(\beta_1 C_1 \frac{\beta_3}{R_2 + \beta_1 + \beta_2} \quad \beta_2 C_2 \frac{\beta_3}{R_2 + \beta_1 + \beta_2} \quad -\beta_3 C_3 \right)$$

$$\bar{\mathbf{e}} = -\frac{\beta_3 (R_1 - \beta_1)}{(R_2 + \beta_1 + \beta_2) R_1}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \beta_3 \quad (8.9)$$

sowie für die lineare Strom-Spannungs-Beziehung die Matrizen

$$\bar{\mathbf{g}} = -\bar{\mathbf{d}}, \quad \bar{\mathbf{h}} = -\bar{\mathbf{e}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{k}} = -\beta_3. \quad (8.10)$$

Generalisierung

Es ist anzumerken, dass die Umgehung der Matrixinversion nicht verallgemeinert werden kann. Ob ein solcher Schritt möglich ist, hängt maßgeblich vom Aufbau der Systemmatrix \mathbf{A} ab und ist in jedem Anwendungsfall einzeln zu prüfen.

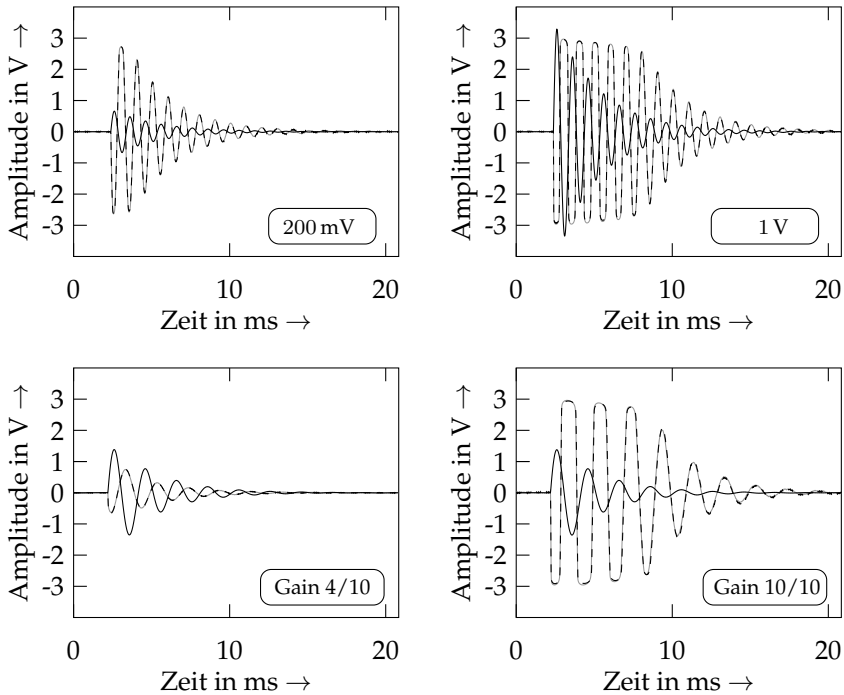
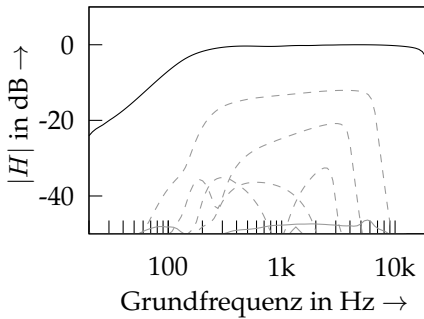


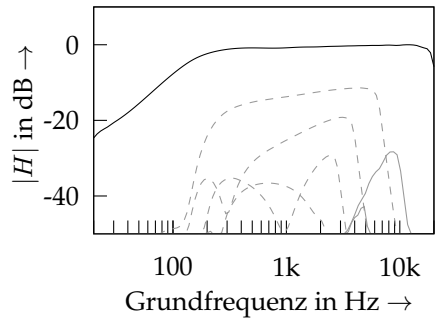
Abbildung 8.3: Vergleich der Zeitsignale von Messung (grau) und Simulation (schwarz, gestrichelt) für die JCM900 Vorstufe bei Anregung mit einem Sinus-Burst (schwarz). Oben: Frequenz 1 kHz, Gain: 8/10 für verschiedene Pegel u_{ein} . Unten: 500 Hz/500 mV, verschiedene Gain-Einstellungen.

Ergebnisse

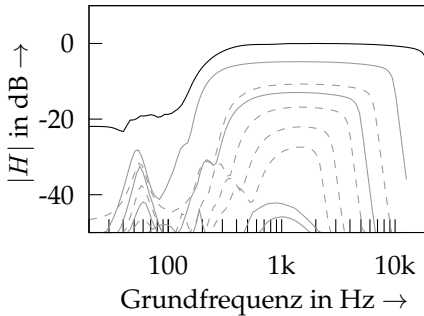
Zur Überprüfung wird die Simulation mit der realen Anlagschaltung verglichen, siehe Abbildungen 8.3 und 8.4. Eine genaue Vermessung der Bauteilwerte konnte in diesem Fall nicht durchgeführt werden. Die Simulation wurde daher mit den nominellen Werten berechnet. Zwischen Eingangsbuchse und zu untersuchender Schaltung liegt eine weitere Vorverstärkerstufe im Signalpfad, die eine Verstärkung um den Faktor 3 bezweckt und linear arbei-



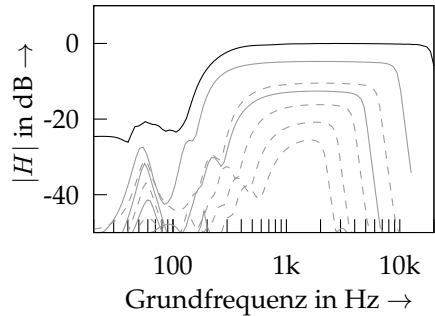
(a) Messung, Gain = 6/10



(b) Simulation, Gain = 6/10



(c) Messung, Gain = 10/10



(d) Simulation, Gain = 10/10

Abbildung 8.4: Frequenzgang (schwarz), gerade (grau) und ungerade Harmonische (grau, gestrichelt) für die JCM900 Vorstufe.

tet. Die angegebenen Amplitudenwerte beziehen sich an dieser Stelle auf das in die Eingangsbuchse eingespeiste Testsignal. In Abbildung 8.3 werden Zeitsignale aus der Simulation mit gemessenen Signalen verglichen. Es ist erkennbar, dass die Oszillogramme der analogen Referenz und der digitalen Simulation eine sehr gute Deckung aufweisen. Diese Feststellung kann für alle Einstellungen des Potentiometers, sowie für verschiedene Frequenz- und Amplitudenwerte getroffen werden [DHZ10]. Zu dem gleichen Ergebnis führt die Auswertung des Oberwellenspektrums, gezeigt in Abbildung 8.4. Auch hier zeigt die Simulation einen vergleichbaren Verlauf.

Es lässt sich daher festhalten, dass die Simulation den Charakter der Refe-

renzschaltung sehr gut erfasst und die Ergebnisse sehr zufriedenstellend sind. Auch ein Hörvergleich bestätigt diese Aussage.

8.1.2 Beispiel: Fuzz-Face

Mit der Verzerrerschaltung „Fuzz-Face“ (Fa. ARBITER ELECTRONICS LTD., 1966) soll ein besonders stark verzerrendes Effektgerät untersucht werden. Dieses Pedal genießt eine hohe Popularität und stand Pate für Dutzende von Nachbauten und Varianten. Die simple, aber einzigartig klingende Schaltung ist darüberhinaus bereits Gegenstand mehrerer wissenschaftlicher Studien gewesen [COCR09, Zol10, Kee98, Zöl11]. Im Internet diskutieren Hobbyelektroniker auf DIY-Seiten, welche Transistorbestückung zum besten „Fuzz“-Sound führt.

Schaltungsanalyse

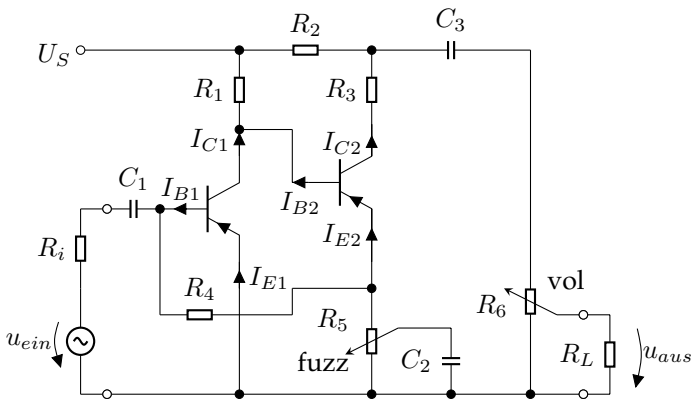


Abbildung 8.5: Schaltung des Verzerrerpedals Fuzz-Face.

Abbildung 8.5 zeigt den Schaltplan der Schaltung, die Bauteilwerte sind in Tabelle 8.2 aufgeführt. Das Herzstück der Schaltung sind zwei direkt gekoppelte pnp-Germanium Transistoren des Typs AC 128¹. Die kaskadierten Transistoren bewirken eine sehr hohe Verstärkung und verzerrern das Signal

¹ Andere Ausführungen mit Silizium-Transistoren waren ebenfalls beliebt, klangen aber anders.

Tabelle 8.2: Bauteilwerte der Fuzz-Face-Schaltung.

R_i	5 k Ω	R_4	100 k Ω	C_1	2,2 μ F
R_1	33 k Ω	R_5	1 k Ω	C_2	20 μ F
R_2	470 Ω	R_6	500 k Ω	C_3	10 nF
R_3	8,2 k Ω	R_L	1 M Ω	U_S	-9 V

asymmetrisch. So führt bereits die Anregung mit einem Sinussignal sehr geringer Amplitude zu einer Rechteckspannung am Ausgang. Für die Steuerung des Effektes sind zwei Potentiometer vorgesehen. Mit *Fuzz* wird die Wechselstromgegenkopplung durch R_5 und somit der Grad der Verzerrung verändert. Mit *Vol* kann die Lautstärke angepasst werden. Zu beachten ist, dass die Versorgungsspannung bei der abgebildeten Schaltung negativ gegenüber dem Bezugspunkt ist.

Im Schaltplan in Abbildung 8.5 ist der Widerstand R_i besonders zu beachten. Die Eingangsimpedanz der zu simulierenden Schaltung ist sehr niederohmig und stellt somit eine deutliche Belastung für einen typischen Magnettonabnehmer dar [Zol10]. Die realistische Simulation der Schaltung ist nur dann möglich, wenn die Quellimpedanz des Gitarrentonabnehmers in die Simulation einbezogen wird. Alternativ kann auch ein L-C-R Schwingkreis für die Modellierung der Quellimpedanz genutzt werden [COCR09].

Eine geeignete Schaltungsbeschreibung bietet die Maschenstromanalyse, mit der folgende Maschen identifiziert werden können:

$$M_1 : 0 = -u_{ein} + u_{Ri} + u_{C1} + u_{BC1} + u_{BE2} + u_{R5a} + u_{R5b} \quad (8.11)$$

$$M_2 : 0 = -u_{BE1} + u_{R4} - u_{BE2} + u_{BC2} - u_{R3} + u_{C3} + u_{R6a} + u_{R6b} \quad (8.12)$$

$$M_3 : 0 = -u_{C2} - u_{R5a} - u_{BE2} + u_{BC2} - u_{R3} + u_{C3} + u_{R6a} + u_{R6b}, \quad (8.13)$$

wobei die Potentiometer mit ihren Teilwiderständen R_{xa} und R_{xb} eingehen.

Beschreibung der Nichtlinearitäten

Der AC 128 ist ein pnp-Germanium-Transistor mit geringer Bandbreite [AC128], der ursprünglich für den Aufbau von Komplementärendstufen mit seinem npn-Gegenstück AC 127 konzipiert wurde. Diese Bauteile zählen zu den „Halbleitern der frühen Generation“. Bei diesen sind erhebliche Streuungen in den Kennwerten zu verzeichnen. Beispielsweise wird die Gleichstromverstärkung B als wichtiger Kennwert vom Hersteller VALVO mit

$B = 90(55 \cdot \dots \cdot 175)$ im gleichen Arbeitspunkt angegeben. Aus diesem Grund ist eine Selektion geeigneter Transistoren unbedingt notwendig. Aussagen über geeignete Kennwerte, und wie diese mit einem einfachen Messverfahren ermittelt werden können, sind in [Kee98] angegeben.

Um die Transistorströme I_B, I_E bei vorgegebenen Spannungen u_{BE}, u_{BC} auszudrücken, hat sich die Großsignalbeschreibung nach Ebers und Moll als geeignet erwiesen. Für einen pnp-Transistor sind diese definiert als

$$I_B = \frac{1}{\beta_F} \cdot I_{ES} \left(e^{-\frac{u_{BE}}{U_t}} - 1 \right) + \frac{1}{\beta_R} \cdot I_{CS} \left(e^{-\frac{u_{BC}}{U_t}} - 1 \right), \quad (8.14)$$

$$I_E = I_{ES} \left(e^{-\frac{u_{BE}}{U_t}} - 1 \right) - \frac{\beta_R - 1}{\beta_R} \cdot I_{CS} \left(e^{-\frac{u_{BC}}{U_t}} - 1 \right), \quad (8.15)$$

mit den Sättigungsströmen der Basis-Emitter- und Kollektor-Basis-Dioden (I_{ES}, I_{CS}), der Temperaturspannung U_t und den Verstärkungsfaktoren β_F (vorwärts) und β_R (rückwärts) [MD05]. Diese Parameter können mit Hilfe des Datenblatts [AC128] abgeschätzt werden. Die Ordnung der Nichtlinearität ist $q = 4$, da mit zwei Transistoren insgesamt vier Ströme sowie vier Spannungen zu betrachten sind.

Zustandsraumbeschreibung

Die Eingänge des Systems sind die Signalspannung u_{ein} sowie die Versorgungsspannung U_S , der Eingangsvektor ergibt sich daher zu $\mathbf{u} = (u_{ein} \ U_S)^T$. Mit den drei Energiespeichern folgt $\mathbf{x} = (u_{C1} \ u_{C2} \ u_{C3})^T$ für den Zustandsvektor. Für die Zusammenfassung der Transistorspannungen und -ströme wird

$$\mathbf{i} = (I_{B1} \ I_{E1} \ I_{B2} \ I_{E2})^T$$

$$\mathbf{v} = (u_{BE1} \ u_{BE2} \ u_{BC1} \ u_{BC2})^T$$

festgelegt. Für die zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_x} & -\frac{1}{C_1 R_x} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_x} & -\frac{R_x + R_{5b}}{C_2 R_{5b} R_x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_3 R_m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R_x} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_m} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{R_4+R_{5a}}{C_1 R_x} & 0 & 0 & \frac{R_{5a}}{C_1 R_x} \\ \frac{R_i}{C_2 R_x} & 0 & 0 & -\frac{R_4+R_i}{C_1 R_x} \\ 0 & 0 & -\frac{R_2}{C_3 R_m} & \frac{R_2}{C_3 R_m} \end{pmatrix}, \quad (8.16)$$

wobei aus Gründen der besseren Darstellung $R_x = R_4 + R_i + R_{5a}$ sowie $R_m = R_2 + R_6$ zusammengefasst sind. Die Ausgangsspannung U_{aus} liegt über dem unteren Teilwiderstand des *Vol*-Potentiometers an, belastet durch den Eingangswiderstand einer nachfolgenden Last. Für die Ausgangsgleichung ergeben sich somit die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= -\frac{R_{6b} \| R_L}{R_m} \cdot (0 \ 0 \ 1)^T, & \mathbf{e} &= \frac{R_{6b} \| R_L}{R_m} \cdot (0 \ 1)^T, \\ \mathbf{f} &= (R_{6b} \| R_L) \frac{R_2}{R_m} \cdot (0 \ 0 \ -1 \ 1)^T. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Schließlich ist die lineare Strom-Spannungs-Beziehung zu ermitteln. Für diese ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{R_i}{R_x} - 1 & \frac{R_i}{R_x} & 0 \\ \frac{R_i}{R_x} - 1 & \frac{R_i}{R_x} & 0 \\ \frac{R_{5a}}{R_x} & \frac{R_{5a}}{R_x} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_2}{R_m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_i}{R_x} & 0 \\ 1 - \frac{R_i}{R_x} & -1 \\ -\frac{R_{5a}}{R_x} & 1 \\ 0 & \frac{R_2}{R_m} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{R_i(R_4+R_{5a})}{R_x} & 0 & 0 & -\frac{R_i R_{5a}}{R_x} \\ \frac{R_i(R_4+R_{5a})}{R_x} + R_1 & -R_1 & -R_1 & -\frac{R_i R_{5a}}{R_x} \\ -\frac{R_1 R_x + R_{5a} R_i}{R_x} & R_1 & R_1 & \frac{R_{5a}(R_i+R_4)}{R_x} \\ -R_1 & R_1 & \frac{R_m(R_1+R_3)+R_2 R_6}{R_m} & -R_3 - \frac{R_2 R_6}{R_m} \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Ergebnisse

Ein Fuzz-Face-Originalgerät konnte in diesem Fall nicht für einen Vergleich herangezogen werden. Diese Geräte sind äußerst selten zu erhalten und werden, falls mal erhältlich, zu nicht gerechtfertigten Sammlerpreisen gehandelt.

Die Messergebnisse beziehen sich daher auf einen für die Analyse angefertigten Nachbau der Schaltung.

Die Gegenüberstellung von gemessenen und simulierten Ausgangssignalen zeigt Abbildung 8.6. Dargestellt sind Oszillogramme für verschiedene Einstellungen und Anregungssignale. Augenfällig ist die stark veränderte Wellenform, die eine nahezu rechteckförmige Gestalt annimmt. Simulation und Messung stimmen zufriedenstellend überein, erkennbar sind jedoch leichte Abweichungen. Als Begründung ist u.a. zu nennen, dass sich das Verhalten der Germanium-Transistoren nicht exakt durch die Ebers-Moll-Gleichungen beschreiben lässt. In einem Hörvergleich mit Gitarrensensoren konnte der Simulation dennoch eine sehr hohe Ähnlichkeit zum Originalgerät bestätigt werden.

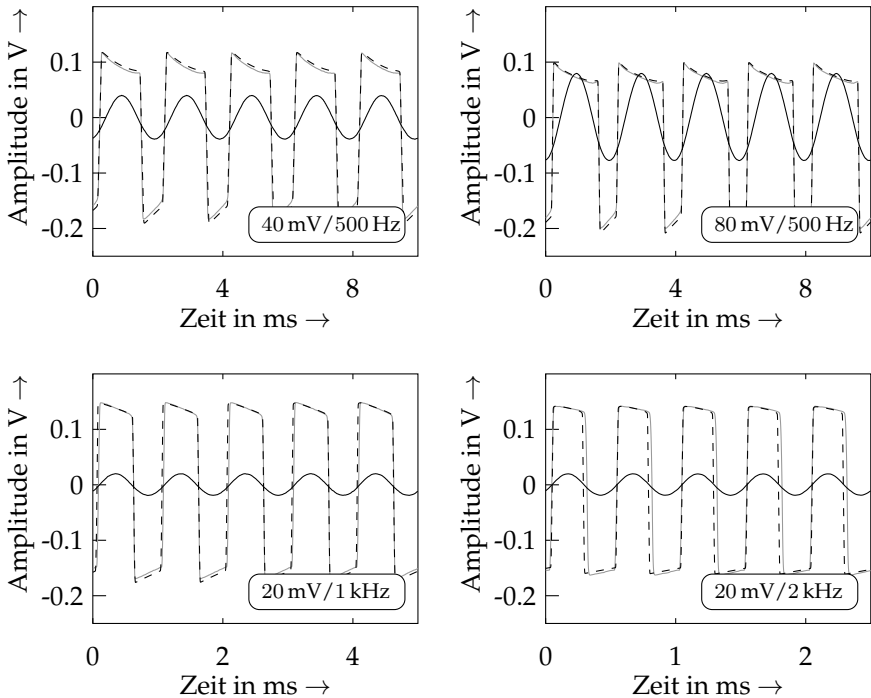


Abbildung 8.6: Messungen (grau) und Simulationen (gestrichelt) des Fuzz-Face. Fuzz-Poti ganz zurückgedreht (oben), bzw. ganz aufgedreht (unten).

8.2 Verzerrung durch Röhren

8.2.1 Beispiel: Kathodenbasisschaltung

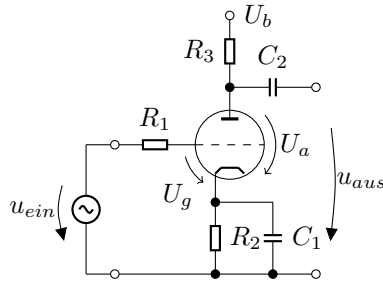


Abbildung 8.7: Kathodenbasisschaltung.

Die Simulation von Verzerrungen in Röhrenschaltungen soll anhand einer Triode in Kathodenbasisschaltung (engl. Bezeichnung *Common-Cathode Amplifier*) diskutiert werden, siehe hierzu den Schaltplan in Abbildung 8.7. Schaltungen dieser Art sind in fast allen Gitarrenverstärkern zu finden. Sie werden auf Grund ihrer guten Eigenschaften (hoher Eingangswiderstand, hohe Spannungsverstärkung und Einfachheit der Schaltung) vorwiegend als Vorverstärker eingesetzt.

Schaltungsanalyse

Über den Kathodenwiderstand R_2 fließt der von der Kathode emittierte Strom und ruft einen Spannungsabfall hervor. Dieser Spannungsabfall gibt der Triode die negative Gittervorspannung und legt damit den Arbeitspunkt der Röhre fest. Dieses Schaltungsprinzip ist als „automatische Gittervorspannungs-Erzeugung“ bekannt und Standard. Durch die Stromgegenkopplung über R_2 wird der Arbeitspunkt stabilisiert, gleichzeitig aber auch die Wechselspannungsverstärkung vermindert. Der Kathodenkondensator C_1 überbrückt R_2 wechselstrommäßig und vermindert den Gegenkopplungseffekt für Wechselspannungen, dies geschieht jedoch frequenzabhängig. Damit erhöht sich die Wechselspannungsverstärkung, in gleichem Maße jedoch auch die Verzerrungen. C_1 beeinflusst die untere Grenzfrequenz der Verstärkerstufe. In manchen Verstärkerdesigns ist C_1 bewusst gering gewählt (z.B.

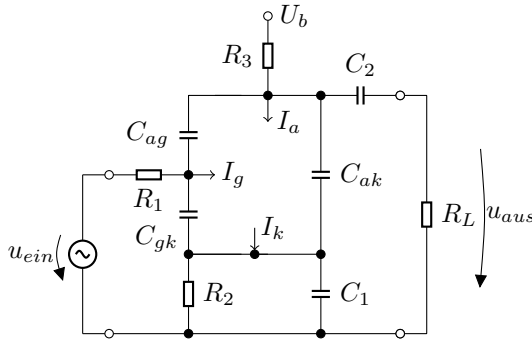


Abbildung 8.8: Kathodenbasisschaltung mit eingezeichneten parasitären Kapazitäten und ohmscher Last.

viele MARSHALL-Verstärker), wodurch sich die Anhebung der Verstärkung erst für höhere Frequenzen einstellt. Ein klein dimensionierter Kathodenkondensator bewirkt dann eine Höhenanhebung ähnlich einem Kuhschwanzfilter.

Wenn der Arbeitspunkt der Kathodenbasisschaltung ausreichend negativ vorgespannt ist, darf von einer näherungsweise leistungslosen Steuerung und somit von einer hohen Eingangsimpedanz ausgegangen werden.

Abbildung 8.8 zeigt die Kathodenbasisschaltung als Ersatzschaltbild. Die parasitären Kapazitäten der Triode C_{ag} , C_{gk} und C_{ak} sind berücksichtigt, außerdem ist ein Lastwiderstand R_L eingezeichnet. Die Verstärkerröhre selbst wird nur noch durch ihre Ströme repräsentiert. Dieses Ersatzschaltbild dient als Ausgangspunkt für die Analyse. Die zugehörigen Bauteilwerte sind in Tabelle 8.3 verzeichnet. Zunächst wird das Netzwerk mit Hilfe der Maschenstromanalyse vollständig beschrieben, dazu sind fünf Maschen festzulegen, z.B.

$$M_1: 0 = -u_{ein} + u_{R1} - u_{Cag} - u_{R3} + U_b \quad (8.19)$$

$$M_2: 0 = -U_b + u_{R3} + u_{Cag} + u_{Cgk} + u_{R2} \quad (8.20)$$

$$M_3: 0 = u_{Cag} + u_{Cgk} - u_{Cak} \quad (8.21)$$

$$M_4: 0 = -U_b + u_{R3} + u_{C2} + u_{RL} \quad (8.22)$$

$$M_5: 0 = -u_{ein} + u_{R1} + u_{Cgk} + u_{C1}. \quad (8.23)$$

Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, stehen die parasitären Kapazitäten C_{ag} , C_{gk} und C_{ak} in einer linearen Abhängigkeit, da sich jeweils ein Span-

Tabelle 8.3: Bauteilwerte der Kathodenbasisschaltung.

R_1	32,8 k Ω	C_{ag}	2,4 pF	C_1	68 nF
R_2	1,8 k Ω	C_{gk}	2,3 pF	C_2	22 nF
R_3	100 k Ω	C_{ak}	0,9 pF	U_b	260 V
R_L	5 M Ω				

nungsabfall durch eine Kombination der beiden anderen darstellen lässt. Es gilt

$$\begin{aligned} u_{C_{ak}} &= u_{C_{ag}} + u_{C_{gk}} \\ &\Downarrow \\ \dot{u}_{C_{ak}} &= \dot{u}_{C_{ag}} + \dot{u}_{C_{gk}}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Für die Darstellung im Zustandsraum bedeutet dies den Wegfall eines Zustands, da für die vollständige Beschreibung nunmehr vier Kapazitäten ausreichen.

Zustandsraumbeschreibung

Die Formulierung als Zustandsraummodell beinhaltet keine weiteren Schwierigkeiten. Mit Zustandsvektor $\mathbf{x} = (u_{C_{ag}} \ u_{C_{gk}} \ u_{C_1} \ u_{C_2})^T$, Eingangsvektor $\mathbf{u} = (U_b \ u_{ein})^T$ sowie $\mathbf{i} = (I_g \ I_a)^T$ können für die Zustandsgleichung folgende Matrizen identifiziert werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{C_{gk}G_m}{C_x^2} & \frac{C_{ak}}{R_1C_x^2} - \frac{C_{gk}G_m}{C_x^2} & \frac{C_{gk}}{R_LC_x^2} & \frac{C_{ak}}{R_1C_x^2} - \frac{C_{gk}G_m}{C_x^2} \\ -\frac{C_{ag}G_m}{C_x^2} & -\frac{C_{ag}R_1G_m + C_{ag} + C_{ak}}{R_1C_x^2} & \frac{C_{ag}}{R_LC_x^2} & -\frac{C_{ag}R_1G_m + C_{ag} + C_{ak}}{R_1C_x^2} \\ \frac{1}{C_2R_L} & \frac{1}{C_2R_L} & -\frac{1}{C_2R_L} & \frac{1}{C_2R_L} \\ -\frac{G_m}{C_1} & -\frac{G_m}{C_1} - \frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_LC_1} & -\frac{G_m}{C_1} - \frac{R_1 + R_2}{C_1R_1R_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{C_{gk}}{R_3C_x^2} & -\frac{C_{ak}}{R_1C_x^2} \\ \frac{C_{ag}}{R_3C_x^2} & \frac{C_{ag} + C_{ak}}{R_1C_x^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R_3C_1} & \frac{1}{R_1C_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{C_{ak}}{C_x^2} & -\frac{C_{gk}}{C_x^2} \\ -\frac{C_{ag} + C_{ak}}{C_x^2} & -\frac{C_{ag}}{C_x^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

mit $C_x^2 = C_{gk}C_{ak} + C_{ag}C_{ak} + C_{ag}C_{gk}$ und $G_m = (R_3 + R_L)/(R_3R_L)$. Für die Ausgangsgleichung folgen

$$\mathbf{d} = (1 \quad 1 \quad -1 \quad 1), \quad \mathbf{e} = \mathbf{f} = (0 \quad 0). \quad (8.26)$$

Für die lineare Strom-Spannungs-Beziehung der nichtlinearen Schaltungselemente ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

mit Spannungsvektor $\mathbf{v} = (U_a \quad U_g)^T$. Damit ist die Überführung in den zeitkontinuierlichen Zustandsraum abgeschlossen und eine geeignete Systembeschreibung der Ordnung $l = 4$ gefunden.

Beschreibung der Nichtlinearitäten

Die nichtlineare Strom-Spannungsbeziehung ist durch Einbinden eines geeigneten Röhrenmodells vorzugeben. Für die nachfolgenden Untersuchungen werden die neuen Beziehungen nach Abschnitt 6.7.4 bzw. Abschnitt 6.8.2 gewählt. Da der Vektor \mathbf{i} für die Beschreibung einer Triode zwei Einträge benötigt, ist die Ordnung der Nichtlinearität $q = 2$.

Ergebnisse

Zu Beginn sind die Zeitsignale der Triodenstufe zu betrachten, diese sind in Abbildung 8.9 dargestellt. Die Simulation wurde zunächst mit dem Triodenmodell nach Abschnitt 6.8.2 durchgeführt. Deutlich erkennbar ist die mit Erhöhung der Eingangsamplitude stärker werdende Verzerrung. Diese weist eine Asymmetrie auf, da die positiven Halbwellen eine stärkere Begrenzung erfahren als die negativen Halbwellen. Die Simulation zeigt eine hohe Übereinstimmung mit der Messung und bestätigt somit zusätzlich die gute Eignung des Triodenmodells.

Die Analyse der harmonischen Verzerrungen ist in Abbildung 8.10 dargestellt. Gezeigt sind der Frequenzgang und die harmonischen Oberwellen bei einer geringen Aussteuerung mit $u_{ein} = 1 \text{ V}$ und bei deutlicher Übersteuerung mit $u_{ein} = 28 \text{ V}$ Scheitelwert. Bei geringer Aussteuerung verhält sich die Schaltung linear, erkennbar ist zudem die Höhenanhebung durch den klein gewählten Kathodenkondensator. Im Übersteuerungsfall erfahren die harmonischen Anteile eine deutliche Anhebung. Die k_3 -Komponente ist dabei

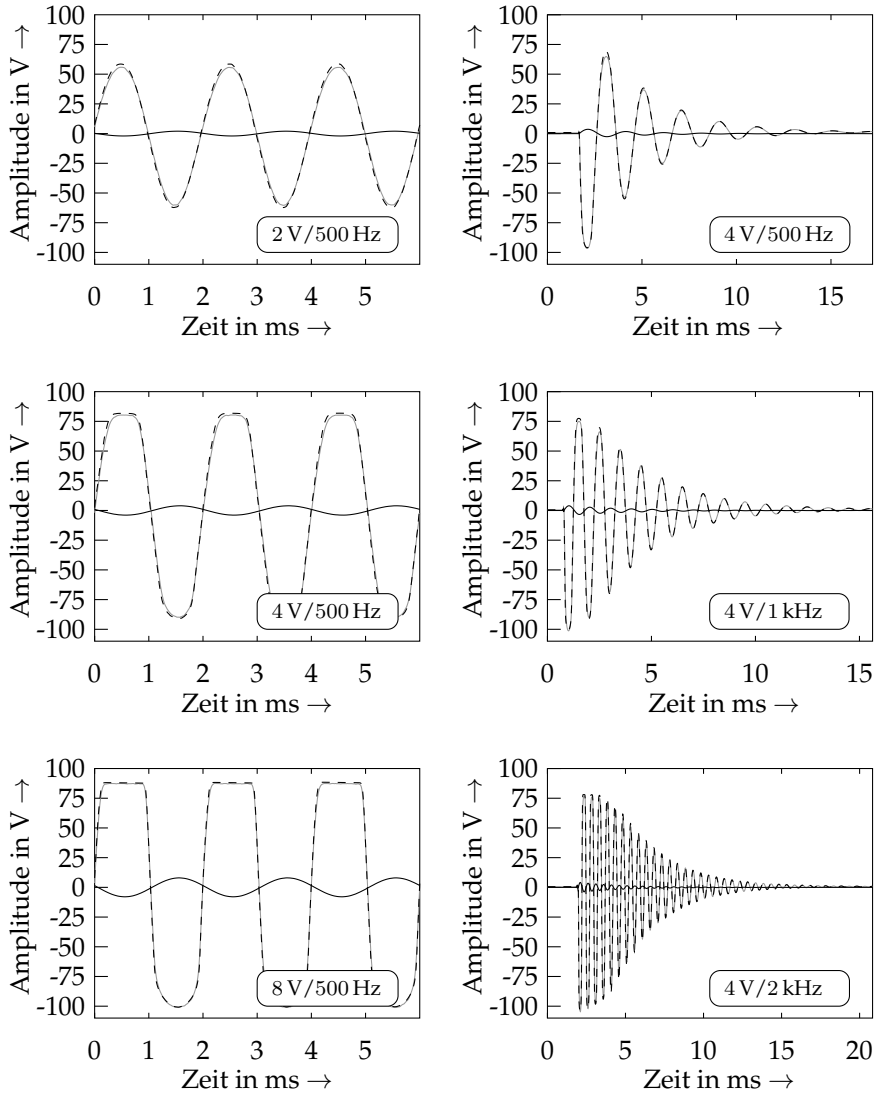


Abbildung 8.9: Kathodenbasisschaltung mit einer ECC83 bei Anregung mit verschiedenen Testsignalen (schwarz), Messungen (grau) und Simulationen (gestrichelt).

am stärksten ausgeprägt. Simulation und Messung zeigen wieder ein hohes Maß an Übereinstimmung.

Abbildung 8.11 zeigt die harmonischen Verzerrungen für dieselbe Schaltung, diesmal jedoch mit einer ECC81 bestückt. In der Simulation wurde die Röhrenbeschreibung nach Abschnitt 6.7.4 genutzt. Die Klirrateile sind im Vergleich zu ECC83 weniger stark ausgeprägt. Auch für diesen Fall zeigen Simulation und Messung eine hohe Übereinstimmung.

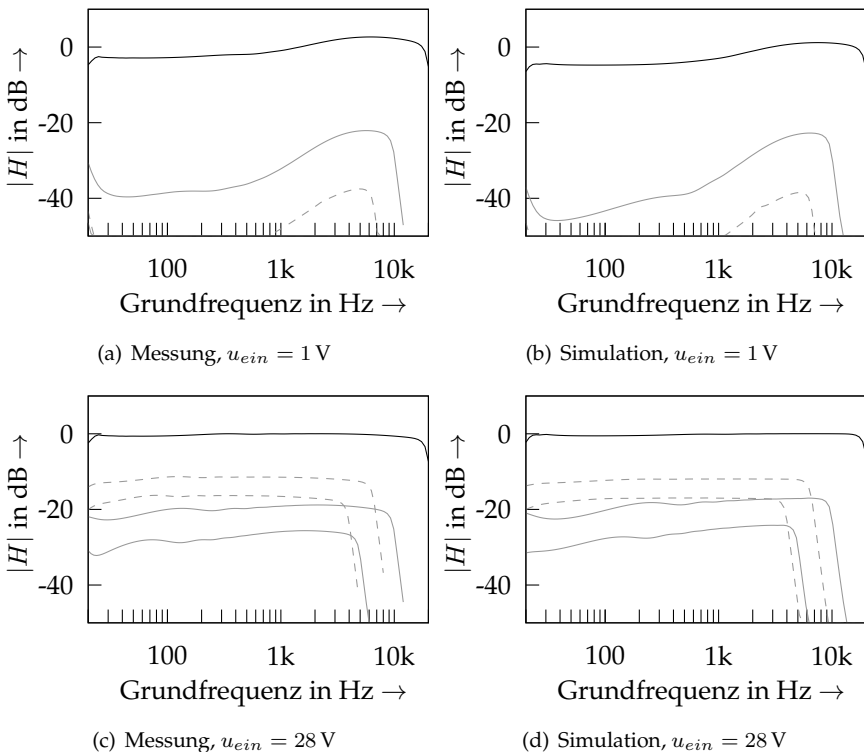


Abbildung 8.10: Frequenzgang (schwarz), gerade (grau) und ungerade Harmonische (grau, gestrichelt) für die Kathodenbasisschaltung mit einer ECC83.

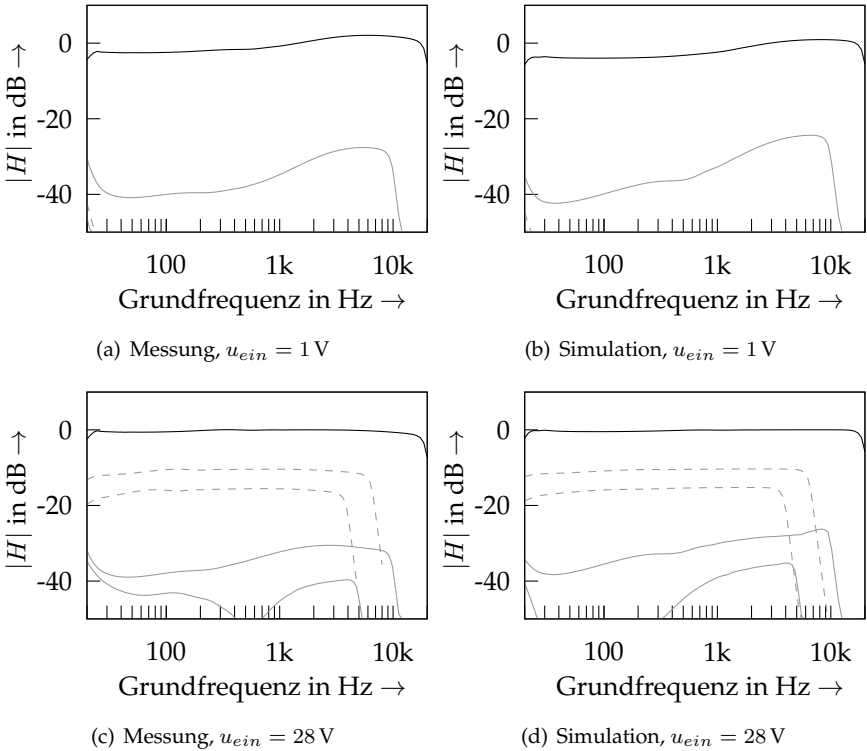


Abbildung 8.11: Frequenzgang (schwarz), gerade (grau) und ungerade Harmonische (grau, gestrichelt) für die Kathodenbasisschaltung mit einer ECC81.

8.2.2 Beispiel: Kathodenbasisschaltung, vereinfacht

Aus der Sicht des Ingenieurs stellt sich oft die Frage, ob bei einer gegebenen Schaltung weitere Vereinfachungen vertretbar sind. In vielen Anwendungsfällen der Kathodenbasisschaltung sind die Auswirkungen der parasitären Kapazitäten zwischen Anode und Kathode sowie zwischen Gitter und Kathode sehr gering. Lediglich die Gitter-Anoden-Kapazität hat einen nennenswerten Einfluss im interessierenden Frequenzbereich [BW59, Pot09]. In diesem Beispiel soll daher überprüft werden, ob C_{gk} und C_{ak} vernachlässigt werden können.

Zustandsraumdarstellung

Die Schaltung aus Abbildung 8.8 wird erneut analysiert, die parasitären Kapazitäten C_{gk} und C_{ak} werden dabei durch Leerläufe ersetzt. Mit Zustandsvektor $\mathbf{x} = (u_{C_2} \ u_{C_1} \ u_{C_{ag}})^T$, Eingangsvektor $\mathbf{u} = (u_{ein} \ U_b)^T$ sowie $\mathbf{i} = (I_g \ I_a)^T$ ergeben sich nun die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R_3+R_1}{C_2 R_x^2} & 0 & \frac{R_3}{C_2 R_x^2} \\ 0 & -\frac{1}{C_1 R_2} & 0 \\ \frac{R_3}{C_{ag} R_x^2} & 0 & -\frac{R_L+R_3}{C_{ag} R_x^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{R_3}{C_2 R_x^2} & \frac{R_1}{C_2 R_x^2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{R_3+R_L}{C_{ag} R_x^2} & \frac{R_L}{C_{ag} R_x^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{R_3 R_1}{C_2 R_x^2} & -\frac{R_3 R_1}{C_2 R_x^2} \\ \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{R_1(R_3+R_L)}{C_{ag} R_x^2} & -\frac{R_3 R_L}{C_{ag} R_x^2} \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

mit der Substitution $R_x^2 = R_1 R_L + R_3 R_L + R_3 R_1$. Für die Ausgangsgleichung mit $y = u_{RL} = R_L C_2 \dot{u}_{C_2}$ sind es die Vektoren

$$\mathbf{d} = \frac{R_L}{R_x^2} (-(R_3 + R_1) \ 0 \ R_3),$$

$$\mathbf{e} = \frac{R_L}{R_x^2} (R_3 \ R_1),$$

$$\mathbf{f} = -\frac{R_1 R_3 R_L}{R_x^2} (1 \ 1), \quad (8.29)$$

sowie die Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} \frac{R_3 R_1}{R_x^2} & -1 & -\frac{R_1(R_L + R_3)}{R_x^2} \\ \frac{R_3 R_1}{R_x^2} & -1 & -\frac{R_L R_3}{R_x^2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \frac{R_L}{R_x^2} \begin{pmatrix} R_3 & R_1 \\ R_3 & R_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K} &= -\frac{R_1 R_3 R_L}{R_x^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.30)$$

mit $\mathbf{v} = (U_g, U_a)^T$ für die Strom-Spannungs-Beziehung.

Ergebnisse

Abbildung 8.12 vergleicht die Simulationsergebnisse aus vollständiger und aus vereinfachter Realisierung. Gezeigt werden der Frequenzgang sowie die zweite Harmonische

- für die Simulation mit allen parasitären Kapazitäten (erste Realisierung mit Ordnung $l = 4$)
- sowie für das vereinfachte Modell bei dem C_{gk} und C_{ak} vernachlässigt sind (zweite Realisierung mit Ordnung $l = 3$).

Ebenfalls eingezeichnet ist der Frequenzgang eines sehr stark vereinfachten Modells, bei dem sämtliche parasitären Kapazitäten vernachlässigt wurden (die Ordnung ist in diesem Fall $l = 2$). Zu erkennen ist, dass das Frequenzverhalten der nicht vereinfachten Schaltung und das der um C_{gk} und C_{ak} reduzierten Schaltung einander entsprechen. Das von allen parasitären Kapazitäten befreite Modell zeigt ein deutlich abweichendes Frequenzverhalten.

Es lässt sich daher feststellen, dass die Reduktion auf $l = 3$ Zustände keine klanglichen Nachteile zur Folge hat und gleichwertige Ergebnisse liefert. Kapazität C_{ag} hingegen stellt zusammen mit Widerstand R_1 einen Tiefpass dar, dessen Auswirkung berücksichtigt werden muss. Der Einfluss von C_{ag} in dieser Schaltung ist nicht nur mess- sondern auch hörbar [CH09].

8.2.3 Beispiel: Zweistufiger Vorverstärker

Als weiteres Beispiel für die Verzerrung mit Trioden wird hier die Vorstufe eines aktuellen Übungsverstärkers untersucht.

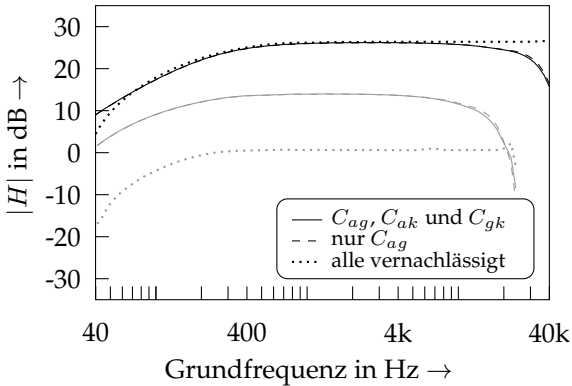


Abbildung 8.12: Frequenzgang (schwarz) und zweite Harmonische (grau) der Kathodenbasisschaltung für Simulationen mit unterschiedlichem Vereinfachungsgrad.

Schaltungsanalyse

Der Schaltplan in Abbildung 8.13 zeigt einen zweistufigen Vorverstärker, die Bauteilwerte können Tabelle 8.4 entnommen werden. Beide Trioden werden in Kathodenbasisschaltung betrieben und sind RC-gekoppelt. Die Ausgangsspannung der ersten Röhre wird dem Gitter der zweiten Triode über einen Spannungsteiler zugeführt. Eine schaltungstechnische Besonderheit ist die kapazitive Überbrückung des Anodenwiderstands R_4 der ersten Stufe durch C_3 . Kondensator C_3 bewirkt dann in der Gesamtschaltung eine zusätzliche Tiefpassfilterung mit einer Grenzfrequenz von etwa 10 kHz. Ausgangsseitig erfolgt eine Filterung durch das Netzwerk bestehend aus R_9 , R_{10} , R_{11} und C_5 . Die Eingangsstufe wird durch die nachfolgende Stufe belastet, hier muss

Tabelle 8.4: Bauteilwerte des zweistufigen Vorverstärkers.

R_1	10 k Ω	R_5	470 k Ω	R_9	1 M Ω	C_2	22 nF
R_2	1 M Ω	R_6	470 k Ω	R_{10}	16,5 k Ω	C_3	220 pF
R_3	1,8 k Ω	R_7	1 k Ω	R_{11}	33 k Ω	C_4	22 nF
R_4	220 k Ω	R_8	100 k Ω	C_1	2,2 μ F	C_5	2,2 nF

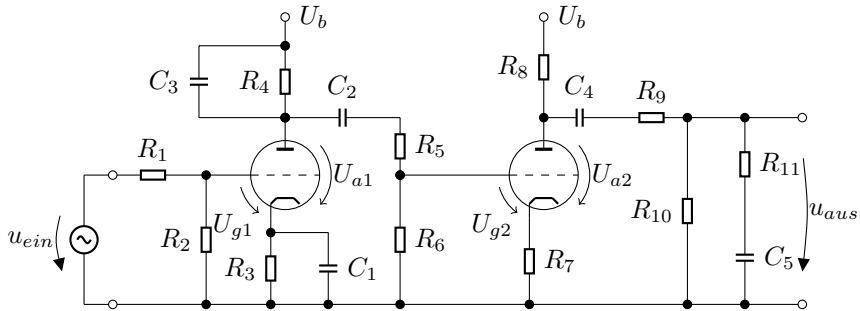


Abbildung 8.13: Schaltplan des zweistufigen Vorverstärkers.

von einer zeitweise positiven Aussteuerung des Gitters ausgegangen werden. Aus diesem Grund ist eine Entkopplung nicht zulässig und beide Stufen sind gemeinsam zu simulieren. Eine Maschenanalyse führt auf die Gleichungen

$$M_1 : 0 = -U_b + u_{R4} + u_{C_{ag1}} + u_{R2} \quad (8.31)$$

$$M_2 : 0 = -U_b + u_{R8} + u_{C_{ag2}} + u_{R6} \quad (8.32)$$

$$M_3 : 0 = -U_b + u_{C3} + u_{C_{ag1}} - u_{R1} + u_{ein} \quad (8.33)$$

$$M_4 : 0 = -U_b + u_{R4} + u_{C2} + u_{R5} + u_{R6} \quad (8.34)$$

$$M_5 : 0 = -U_b + u_{R8} + u_{C4} + u_{R9} + u_{R10} \quad (8.35)$$

$$M_6 : 0 = -u_{R10} + u_{R11} + u_{C5} \quad (8.36)$$

$$M_7 : 0 = -u_{R3} + u_{C1} \quad (8.37)$$

wobei nur die parasitären Kapazitäten C_{ag1} und C_{ag2} berücksichtigt sind, vergleiche hierzu Abschnitt 8.2.2.

Zustandsraumdarstellung und Nichtlinearität

Die Darstellung der symbolischen Matrizen ist auf Grund der hohen Ordnung nicht mehr sinnvoll. Es ergibt sich, unter Berücksichtigung der parasitären Kapazitäten, ein Zustandsraummodell der Ordnung $l = 7$. Die Nichtlinearität hat, bedingt durch die beiden Triodensysteme, die Ordnung $q = 4$.

Ergebnisse

Die Ausgangssignale dieser Röhrenschialtung sind in Abbildung 8.14 dargestellt. Zu erkennen ist, dass bei einer vergleichsweise kleinen Aussteuerung von 100 mV die Verstärkung noch annähernd linear erfolgt, bei höheren Eingangsamplituden jedoch deutliche Verzerrungen auftreten. Diese Beobachtung wird durch die Auswertung der harmonischen Verzerrungen bestätigt, siehe Abbildung 8.15. Bei geringer Aussteuerung wird das Klirrsppektrum durch die dritte Harmonische dominiert. Bei einem Eingangssignal mit Amplitude 1 V enthält das Ausgangssignal in hohem Maße sowohl geradzahlige als auch ungeradzahlige Harmonische. Simulationen und Messungen zeigen eine gute Übereinstimmung.

Anzumerken ist, dass die Bauteilwerte in diesem Fall nicht exakt zu ermitteln waren, da die Referenzschaltung in Form einer Platine mit SMD-Bestückung vorlag. Trotz dieser Unsicherheit sind die Abweichungen zwischen gemessenem und simuliertem Ausgangssignal gering. Die Simulation ist somit als gelungen zu bewerten.

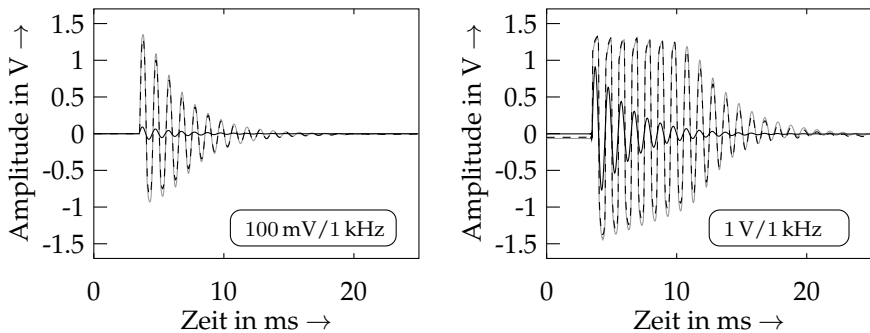


Abbildung 8.14: Ausgangssignale bei Anregung mit Sinus-Bursts verschiedener Eingangsamplitude, Messungen (grau) und Simulationen (gestrichelt) für den zweistufigen Vorverstärker.

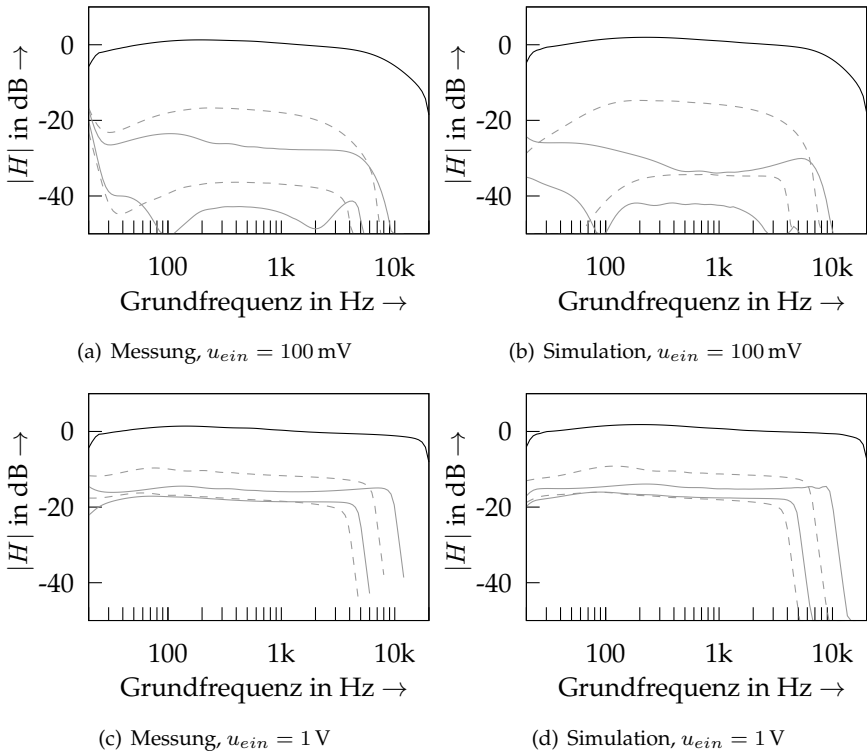


Abbildung 8.15: Frequenzgang (schwarz), gerade (grau) und ungerade Harmonische (grau, gestrichelt) für den zweistufigen Vorverstärker.

8.2.4 Beispiel: Leistungsverstärker

Als letzte Röhrenschtaltung wird die Leistungsendstufe aus einem aktuellen Übungsverstärker modelliert. Die Schaltung ist besonders interessant, da sie Phasenumkehrstufe und Gegentaktendstufe in „puristischer Anmutung“ auf das Wesentliche reduziert. Bemerkenswert in der Realisierung ist auch der Gegensatz. Während die Phasenumkehrstufe modern mit MOSFET-Transistoren aufgebaut ist, zeigt die Endstufe die klassische Gegentaktschaltung mit Trioden und Ausgangsübertrager. Die Ausgangsleistung beträgt „wohnzimmer-

taugliche“ 1 W und wird an einen kleinen 8"-Lautsprecher abgegeben. Den Schaltplan zeigt Abbildung 8.16, die Bauteilwerte sind der Tabelle 8.5 zu entnehmen.

Da Phasenumkehr- und Gegentaktendstufe nicht voneinander entkoppelt werden können, ist die Modellierung als Gesamteinheit vorzunehmen. In Anbetracht der hohen Schaltungskomplexität ist es zweckmässig, das System auf mögliche Vereinfachungen zu untersuchen.

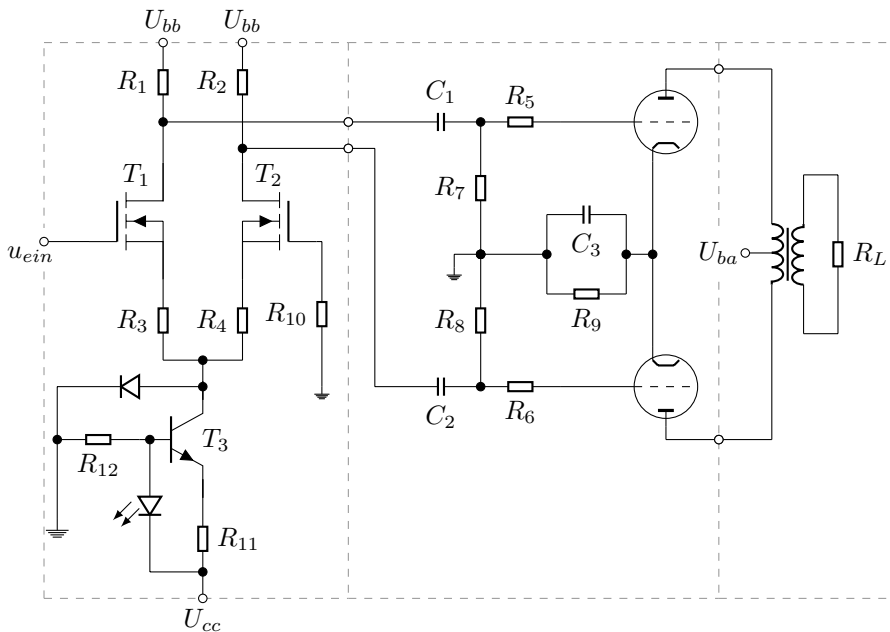


Abbildung 8.16: Phasenumkehr- und Gegentaktendstufe.

Phasenumkehrstufe

Die Phasenumkehrstufe generiert aus dem Eingangssignal zwei Ansteuersignale für die Gegentaktendstufe. Diese Signale haben die gleiche Amplitude, sind jedoch zueinander um 180° phasenverschoben, also gegenphasig.

Die Phasenumkehrstufe wird durch einen Differenzverstärker realisiert. Bestehend aus zwei MOSFET-Transistoren in Sourceschaltung und einer Kon-

Tabelle 8.5: Bauteilwerte von Phasenumkehr- und Gegentaktendstufe.

R_1	47 k Ω	R_8	220 k Ω	R_{p1}	365 Ω	L_1	36,4 H
R_2	47 k Ω	R_9	330 Ω	R_{p1}	460 Ω	L_2	36,4 H
R_3	820 Ω	R_{10}	100 Ω	C_1	22 nF	I_C	-5,7 mA
R_4	820 Ω	R_{11}	270 Ω	C_2	22 nF	i_i	45
R_5	10 k Ω	R_{12}	1 k Ω	C_3	100 μ F	U_{ba}	290 V
R_6	10 k Ω	R_{L1}	8,75 k Ω	C_{ag1}	2,2 pF	U_{bb}	265 V
R_7	220 k Ω	R_{L2}	8,75 k Ω	C_{ag2}	2,2 pF	U_{cc}	-15 V

stantstromquelle im Fußpunkt, entspricht die Schaltung der klassischen Eingangsstufe eines Operationsverstärkers. Die Widerstände R_3 und R_4 bewirken eine Stromgegenkopplung, durch die eine höhere Linearität erzielt wird [TS02]. Der Kollektorstrom I_C des Bipolartransistors T_3 lässt sich mit der Näherung

$$I_C = \frac{U_{LED} - U_{BE}}{R_{11}} \quad (8.38)$$

abschätzen. Die vereinfachende Annahme eines konstanten Stroms I_C erscheint dabei als zulässig und konnte messtechnisch bestätigt werden.

Auch für die n-Kanal MOSFET-Transistoren T_1, T_2 können weitere Vereinfachungen getroffen werden. Da nur kleine Auslenkungen am Eingang u_{ein} zu erwarten sind, kann eine Linearisierung im Arbeitspunkt vorgenommen werden. Ferner ist von einer leistungslosen Ansteuerung auszugehen, es gilt $i_{G1} = i_{G2} = 0$. Das resultierende Kleinsignalmodell lässt sich, unter Vernachlässigung des dynamischen Verhaltens, auf eine von u_{GS} gesteuerte Stromquelle vereinfachen [Göb05]. Mit der Steilheit im Arbeitspunkt g_m gilt für den Strom $i_D \approx g_m u_{GS}$.

Diese Annahme wird durch eine Klirrfaktor-Analyse gestützt, die bei einer angemessenen hohen Aussteuerung folgende Messwerte ergab: $k_2 = -68,5$ dB, $k_3 = -77,9$ dB, $k_4 = -72,9$ dB. Alle höheren Klirrkomponten waren < -80 dB. Die Source-Schaltung arbeitet also weitgehend verzerrungsfrei.

Die Beziehung zwischen eingepprägtem Strom I_C und den Feldeffekttransistoren lässt sich durch eine Knoten- und eine Maschengleichung beschreiben,

dabei gilt

$$\begin{aligned} 0 &= I_C + gm_1 \cdot u_{GS1} + gm_2 \cdot u_{GS2} \\ 0 &= -u_{ein} + u_{GS1} + R_3 \cdot gm_1 \cdot u_{GS1} - R_4 \cdot gm_2 \cdot u_{GS2} - u_{GS2}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

woraus sich für die beiden Gate-Source-Spannungen direkt die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{GS1} &= -\frac{I_C (gm_2 \cdot R_4 + 1) - gm_2 \cdot u_{ein}}{(gm_2 (gm_1 (R_4 + R_3) + 1) + gm_1)} \\ u_{GS2} &= -\frac{I_C (gm_1 \cdot R_3 + 1) + gm_1 \cdot u_{ein}}{(gm_2 (gm_1 (R_4 + R_3) + 1) + gm_1)} \end{aligned} \quad (8.40)$$

ergeben. Das entsprechende Kleinsignalersatzschaltbild für die Phasenumkehrstufe ist in Abbildung 8.17(a) dargestellt.

Gegentaktendstufe

Die Gegentaktendstufe arbeitet mit zwei Triodensystemen vom Typ ECC82 im A-Betrieb [ECC82]. Die Schaltung ist die klassische, optimierte Standard-schaltung für kleine Ausgangsleistungen. Die Triodensysteme der Original-schaltung wurden vermessen. Somit stehen für die Simulation angepasste Parameter zur Verfügung. Als Energiespeicher sind die Röhrenkapazitäten C_{ag1} und C_{ag2} in der Simulation zu berücksichtigen.

Ausgangsübertrager

Der Ausgangswiderstand der Röhre eines Leistungsverstärkers ist, verglichen mit der niederohmigen Impedanz üblicher Lautsprecher, sehr groß. Für die notwendige Anpassung werden Ausgangsübertrager eingesetzt. Dies sind spezielle Transformatoren, bei denen die Wicklungen aufgeteilt und ineinander verschachtelt auf den Wickelkörper aufgebracht sind. Die Teilwicklungen werden dann entsprechend miteinander verschaltet. Damit sollen Streuinduktivitäten und Wicklungskapazitäten auf ein Minimum reduziert werden. Der ideale Ausgangsübertrager ist durch eine transformierte Impedanz darstellbar. In der Realität sorgen jedoch die Induktivitäten und Widerstände der Spulen für ein dynamisches Verhalten. Zudem können Sättigungseffekte zu einem nichtlinearen Übertragungsverhalten führen.

Für die Modellierung der Schaltung ist das Klemmenverhalten der Primärwicklung bei belastetem Sekundärkreis von Interesse, da die Röhren durch

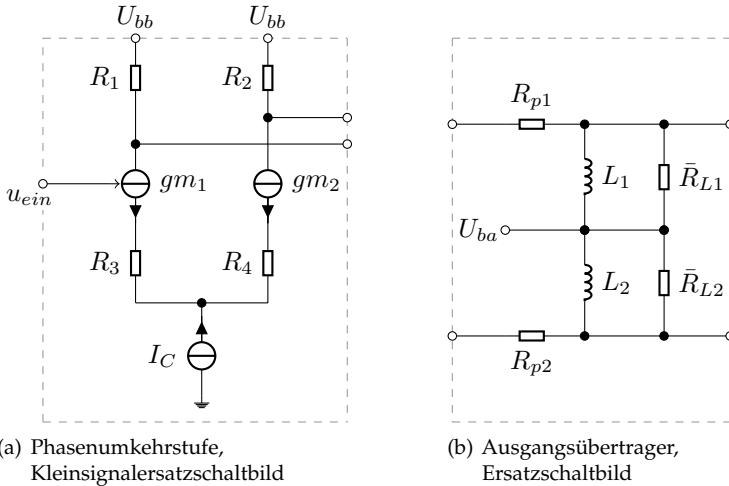


Abbildung 8.17: Vereinfachung der Schaltung.

diese belastet werden. Eine klemmenäquivalente Modellierung erzielt das Ersatzschaltbild in Abbildung 8.17(b). Unberücksichtigt ist die Frequenzabhängigkeit der Lautsprecherimpedanz, welche hier vereinfachend als ohmsche Last mit Nominalwert $R_L = 8\Omega$ angenommen wird.

Über den im Gerät verwendeten Gegentaktübertrager waren keine Angaben verfügbar. Die Bauteilwerte für das Ersatzschaltbild beruhen daher auf Messungen: zur Bestimmung der Wicklungswiderstände wurde ein Ohmmeter, zur Bestimmung von Induktivitäten und transformierter Last eine aktive RLC-Messbrücke genutzt. Die wichtigste Information konnte einer Messung der Übertragerkennlinie entnommen werden: Im relevanten Spannungsbereich darf diese als hinreichend linear angenommen werden, d.h. nichtlineare Beiträge seitens des Übertragers können für diese Schaltung vernachlässigt werden. Die so bestimmten Werte stellen eine Abschätzung dar, führen aber in der Simulation auf plausible Ergebnisse, die sich gut mit den Messungen decken.

Netzwerkanalyse

Die Analyse der Gesamtschaltung wird wieder mit dem Maschenstromsatz durchgeführt. Da nach Berücksichtigung der Vereinfachungen $l = 7$ unabhängige Energiespeicher im System verbleiben, sind ebenso viele Gleichungen aufzustellen. Es folgt

$$M_1 : 0 = -U_{bb} + u_{R1} + u_{C1} + u_{R5} - u_{C_{ag1}} + u_{Rp1} + u_{\bar{R}L1} + U_{ba} \quad (8.41)$$

$$M_2 : 0 = -U_{bb} + u_{R2} + u_{C2} + u_{R6} - u_{C_{ag2}} + u_{Rp2} + u_{\bar{R}L2} + U_{ba} \quad (8.42)$$

$$M_3 : 0 = -U_{bb} + u_{R1} + u_{C1} + u_{R7} \quad (8.43)$$

$$M_4 : 0 = -U_{bb} + u_{R2} + u_{C2} + u_{R8} \quad (8.44)$$

$$M_5 : 0 = u_{R9} - u_{C3} \quad (8.45)$$

$$M_6 : 0 = u_{L1} - u_{\bar{R}L1} \quad (8.46)$$

$$M_7 : 0 = u_{L2} - u_{\bar{R}L2}, \quad (8.47)$$

mit der Maschenanalyse in gewohnter Form. Die berücksichtigten Energiespeicher sind die fünf Kondensatoren C_1, C_2, C_3, C_{ag1} und C_{ag1} sowie die beiden Teilinduktivitäten L_1 und L_2 .

Zustandsraumdarstellung und Nichtlinearität

Die Darstellung der symbolischen Matrizen ist auch in diesem Fall nicht mehr sinnvoll. Das Zustandsraummodell hat die Ordnung $l = 7$, die Nichtlinearität weist die Ordnung $q = 4$ auf.

Einfluss des Lautsprechers

Der Signalpfad beinhaltet bislang, beginnend mit der Einspeisung am Gate von T_1 , die Phasenumkehrstufe, die Gegentaktendstufe sowie den Einfluss des belastenden Übertragers. Einen großen klangbestimmenden Einfluss besitzt jedoch der Lautsprecher selbst, der den Signalpfad im realen Verstärker abschließt. Der Klangcharakter des Lautsprechers ist von großer Bedeutung und muss in der Simulation berücksichtigt werden.

An dieser Stelle wird auf ein bewährtes Konzept zurückgegriffen: das simulierte Klemmsignal wird mit der gemessenen Impulsantwort des Original-Lautsprechers gefaltet. Vernachlässigt wird dabei die Nichtlinearität des Lautsprechers selbst, siehe hierzu [YBK08], die jedoch nur einen geringen Beitrag zum gesamten nichtlinearen Verhalten beisteuert.

Ergebnisse

Als Ergebnisse werden wie gewohnt die Zeitsignale bei Burst-Anregung und die Harmonischen über der Frequenz betrachtet, siehe Abbildungen 8.18 und 8.19. Die Messungen und Simulationen beziehen sich auf die primäre Klemmenspannung des Übertragers bei einer ohmschen Belastung.

Zu erkennen ist, dass die Endstufe durch eine mäßig nichtlineare Übertragung gekennzeichnet ist. Die Auswertung des Klirrspektrums zeigt ein Hervortreten der ungeraden Harmonischen H_3 und H_5 bei höherer Aussteuerung. Es dominiert die dritte Harmonische. Der geringe Anteil gerader Harmonischer ist eine Folge des Gegentaktbetriebs und entspricht den Erwartungen. Die Existenz gerader Harmonischer ist in diesem Fall mit der nicht exakten Symmetrie der Schaltung zu begründen. Zum einen weichen die ohmschen Widerstände der Primärwicklungen im Wert voneinander ab, zum anderen sind auch die Triodenkennlinien nicht ideal deckungsgleich. Bis auf geringe Abweichungen im Bereich tiefer Frequenzen stimmen die Ergebnisse aus Messung und Simulation gut überein. In Anbetracht der getroffenen Vereinfachungen sind die Ergebnisse mehr als zufriedenstellend.

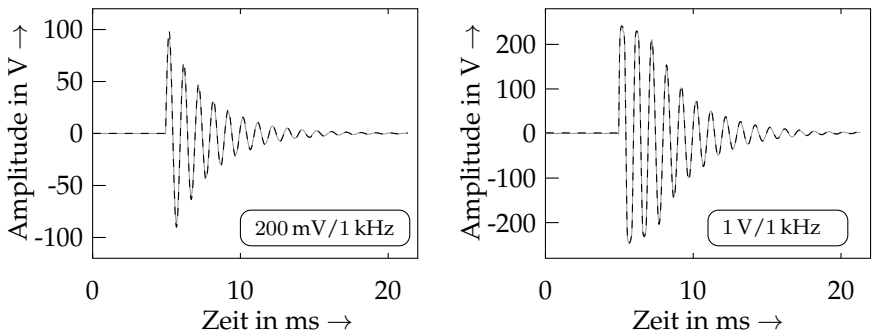


Abbildung 8.18: Ausgangssignale der Endstufe (Ausgangsübertrager primär) bei Anregung mit Sinus-Bursts verschiedener Eingangsamplitude, Messungen (grau) und Simulationen (gestrichelt).

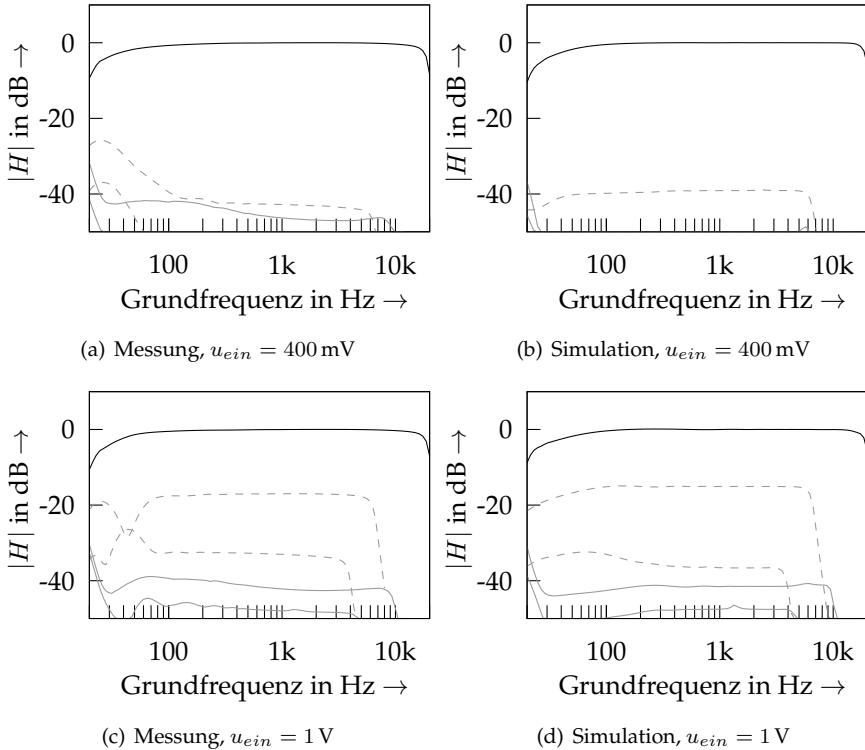


Abbildung 8.19: Frequenzgang (schwarz), gerade (grau) und ungerade Harmonische (grau, gestrichelt) für die Endstufe.

8.3 Weitere nichtlineare Schaltungen

In den vorangegangenen Beispielen wurden Schaltungen vorgestellt, bei denen aktive Bauelemente gezielt zum Hervorrufen nichtlinearer Verzerrungen eingesetzt wurden. Die Eignung des allgemeinen Ansatzes konnte darüber hinaus auch für viele andere Schaltungen nachgewiesen werden.

In [KDZ11] wird das Konzept des erweiterten Zustandsraums für die Nachbildung eines analogen Gitarrenkompressors genutzt. Ähnlich den Dynamikkompressoren in der Tonstudioteknik bezwecken diese Geräte eine Verringe-

rung des Dynamikumfangs des Signals. Im Unterschied zu den Studiogeräten sind typische Gitarrenkompressoren allerdings von deutlich einfacherem Aufbau. Sie haben zudem oft einen ausgeprägten eigenen Klangcharakter. Bei E-Gitarren macht sich der Effekt u.a. in einer Verlängerung des Ausklangs sowie einer Verdichtung der Anschläge (Anschlagsstärke) bemerkbar.

Untersucht wurde ein weit verbreitetes Kompressorpedal des Herstellers MXR. Das Kernstück der Schaltung ist durch einen Transkonduktanzverstärker gegeben (OTA, engl. *operational transconductance amplifier*). Mit diesem wird ein Regelverstärker realisiert, der das Eingangssignal in Abhängigkeit von Signalamplitude und zeitlichem Verlauf verstärkt oder dämpft. Der Klangeffekt kann über (nur) zwei Potentiometer verändert werden. Mit *Sensitivity* wird die Empfindlichkeit der Regelung beeinflusst, mit *Output* wird der Pegel des Ausgangssignals eingestellt.

In [KDZ11] wird neben der vollständigen Zustandsraumbeschreibung ein analytisches, vereinfachtes Modell für den OTA-Baustein angegeben. Darüber hinaus werden das dynamische sowie das statische Verhalten des Modells mit Messungen der Referenzschaltung verglichen. Trotz der getroffenen Vereinfachungen wurde eine gute klangliche Übereinstimmung zur Originalschaltung erreicht.

8.4 Implementierungen

Der Hauptaspekt der vorliegenden Arbeit ist die algorithmische Konzeption der digitalen Modelle. Dennoch soll an dieser Stelle auf die tatsächliche Umsetzung dieser Algorithmen in funktionsfähige Echtzeitprogramme eingegangen werden.

Die vorgestellten Modelle wurden in C-Algorithmen umgesetzt, wobei ein Rahmenprogramm alle notwendigen Schritte bereitstellt und in der Abfolge steuert. Die Berechnungen der Zustandsgleichungen sowie die Koeffizientenbestimmung nach einer Parameteränderung basieren auf den in Kapitel 5 hergeleiteten Beziehungen.

Bei der Programmierung wurden keine spezifischen Bibliotheken genutzt. Benötigte Funktionen wurden selbst implementiert, einige mit tatkräftiger Unterstützung durch Studenten der Professur. Dies betrifft z.B. die Vektor- und Matrixoperationen oder die numerischen Lösungsverfahren.

Aus dem Verzicht spezifischer Bibliotheken ergeben sich sowohl Vor- als auch Nachteile. Ein bedeutender Nachteil ist, dass der Einsatz optimierter Bibliotheken eine deutliche Steigerung der Performanz erwarten lässt. Vor-

teilhaft ist, dass die Modelle nicht auf eine Umgebung (DSP oder Plug-in) festgelegt sind.

8.4.1 DSP-Umsetzung

Einige der Modelle wurden für die Ausführung auf einem Gleitkomma-DSP von TEXAS INSTRUMENTS implementiert. Die Programmierung erfolgte mit der Entwicklungsumgebung *Code Composer Studio* des Herstellers. Die Eingangsdaten werden vom Prozessor *Sample-by-Sample* verarbeitet, so dass die systembedingte Latenz minimal ist.

Die genutzte Hardware-Plattform GEB1 (für *Guitar Effect Board*, Version 1) ist in [DHMZ10] beschrieben und stellt einen speziell auf die Verarbeitung von Gitarrensignalen zugeschnittenen Prototypen dar. Die Spezifikationen des Gerätes orientieren sich an den Anforderungen für den Bühneneinsatz:

- Ein hoher Eingangswiderstand, damit der Gitarrentonabnehmer nicht belastet wird.
- Bereitstellung von Bedienelementen (Potentiometer und Schalter) für den Anwender, damit dieser Parameteränderungen vornehmen und zwischen verschiedenen Einstellungen umschalten kann.
- Ausgänge mit Standardpegeln für den direkten Anschluss z.B. an ein Mischpult.
- Besonders robuste Ausführung mit einem stabilen Gehäuse.

Dieses Hardware-Konzept hat sich bewährt und bereits zahlreiche Stunden Live-Einsatz absolviert.

8.4.2 VST-Umsetzung

Als Alternative zur DSP-Umsetzung wurden alle Modelle als VST-Plug-ins² implementiert. Der Kern beider Implementierungen ist identisch, lediglich das Rahmenprogramm bedarf einiger Anpassungen. Die Programmiersprache ist auch hier C/C++.

Die Realisierung als Plug-in bietet Vorteile gegenüber der DSP-Version. Ein wichtiger Punkt für den Entwickler ist sicherlich das komfortablere Debuggen. Effekt-Plug-ins bieten darüber hinaus eine höhere Flexibilität, da sie in

² Virtual Studio Technology, VST ist ein eingetragenes Warenzeichen der Steinberg Media Technologies GmbH

verschiedene Audioprogramme eingebunden werden können. Optional kann eine grafische Benutzeroberfläche erstellt werden, die eine intuitive Bedienung gestattet.

VST-Schnittstelle

Bei VST handelt es sich um eine kostenlose und offene Schnittstelle, die den Dialog zwischen einem Hostprogramm und Plug-ins (wie virtuellen Effekten oder Instrumenten) ermöglicht. Neben der Sequenzer-Software *Cubase* vom gleichen Hersteller stellen auch viele weitere Audioprogramme die VST-Schnittstelle bereit. Sie ist damit zu einem gängigen Standard geworden. Zur Entwicklung eigener Plug-ins wird das Software Development Kit (SDK) benötigt, das beim Lizenzgeber frei erhältlich ist. Die Datenverarbeitung erfolgt *block-by-block*, dabei werden Abtastrate und Blockgröße vom Hostprogramm vorgegeben.

Vollparametrierung der Modelle

Mit den Möglichkeiten, die eine grafische Benutzeroberfläche bietet, ergeben sich für das virtuelle Modell weitere interessante Anwendungen: Auch wenn das Referenzgerät nur über sehr wenige Einstellmöglichkeiten verfügt, so sind der Parametrierung des virtuellen Modells kaum Grenzen gesetzt. Es ist also durchaus möglich, dem Anwender die Variation aller Bauteilwerte zu gewähren.

Abbildung 8.20 zeigt exemplarisch den Screenshot eines vollständig parametrisierten Modells für das Fuzz-Face [DZ11a]. Neben den in der Originalschaltung vorgesehenen Potentiometern *Fuzz* und *Vol* kann der Anwender sämtliche Bauteilwerte während der Programmausführung verändern und zeitgleich das Klangresultat abhören. Dank dieser Erweiterung entsteht aus dem Modell ein kreatives Sound-Werkzeug, das Klangresultate bei Bauteiländerungen vorhersagbar macht.

8.5 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde die Anwendung der erweiterten Zustandsraumbeschreibung für unterschiedlich geartete Modellierungsprobleme diskutiert. Dabei wurde die universelle Eignung festgestellt. Die untersuchten (Teil-)

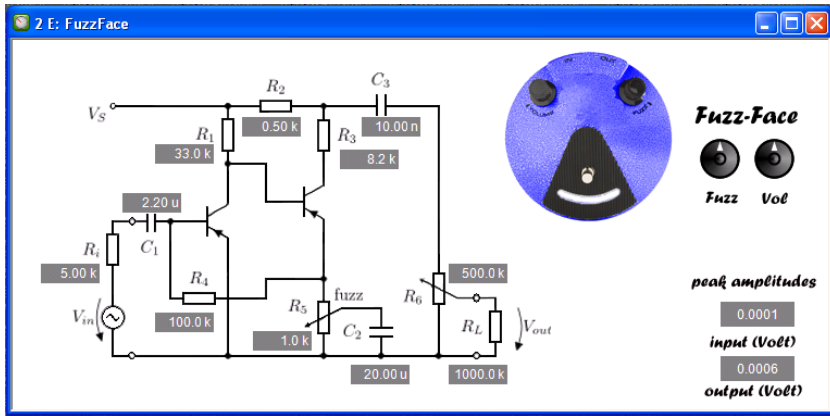


Abbildung 8.20: VST-Plug-in für den Verzerrer Fuzz-Face.

schaltungen entstammen relevanten Geräten aus verschiedenen Jahrzehnten. Besprochen wurden eine sehr einfache Röhrenvorstufe, ein zweistufiger Röhren-Vorverstärker, eine Vorstufe mit signalbegrenzenden LEDs, eine einfache Gegentaktendstufe mit Trioden sowie zwei Effektgeräte. Mögliche Vereinfachungen wurden aufgezeigt und bei der Modellierung berücksichtigt.

Für alle simulierten Teilschaltungen wurde eine gute bis sehr gute Übereinstimmung zu Vergleichsmessungen an analogen Referenzschaltungen festgestellt. Im subjektiven Hörvergleich konnte zudem auch die klangliche Übereinstimmung bestätigt werden.

Daraus lässt sich folgern, dass sowohl der gewählte Zustandsraumansatz als auch die eingebundenen Röhrenmodelle eine systematische Modellierung ermöglichen. Dies gilt auch für Systeme höherer Ordnung und solche mit einer mehrdimensionalen Nichtlinearität.

Die echtzeitfähige Umsetzung der Algorithmen ist möglich und wurde als VST-Plug-in, sowie für die Ausführung auf einem Signalprozessor implementiert.

9

Zusammenfassung

Die Modellierung analoger Gitarrenverstärker mit digitaler Signalverarbeitung ist Thema und Ziel der vorliegenden Arbeit. Schwerpunkt ist dabei die Erarbeitung eines allgemeinen Ansatzes, mit dem die Modellierung beliebiger, auch nichtlinearer Schaltungen auf systematischem Wege möglich ist. Hierzu wird das Konzept des Zustandsraums aufgegriffen. Darüber hinaus ergibt sich die Notwendigkeit, ein Triodenmodell mit realistischer Nachbildung des Gitterstroms zu entwickeln.

In Kombination mit Elektrogitarren werden spezielle Instrumentenverstärker verwendet, die neben der geforderten Lautstärke auch den entscheidenden Beitrag zum beliebten „E-Gitarren-Sound“ liefern. Eingesetzt werden dazu bis heute vorrangig Verstärker in Röhrentechnik, deren technischer Stand sich seit Jahrzehnten nicht wesentlich verändert hat.

Beim „amp modeling“ wird versucht, diesen speziellen Klang mit digitalen Signalverarbeitungsalgorithmen nachzubilden, um sie dann auf einem Computer oder Signalprozessor ausführen zu können.

Für die systematische Modellierung wird die folgende Herangehensweise vorgeschlagen: Zu Beginn steht die Systemanalyse, welche die Kenntnis der vollständigen Schaltung voraussetzt. Nach Möglichkeit sind komplexere Systeme in einem vorbereitenden Schritt in sinnvolle Teilsysteme zu zerlegen. Diese können sowohl linear als auch nichtlinear sein und ggf. parameterabhängige Elemente enthalten. Jedes einzelne dieser Teilsysteme ist dann mit einem geeigneten Ansatz in ein äquivalentes digitales System zu überführen.

Für die Modellierung nichtlinearer Schaltungen hat sich eine erweiterte Formulierung der Zustandsraumbeschreibung als besonders geeignet erwiesen. Die Grundidee der Erweiterung ist die Abtrennung einer statischen Nichtlinearität vom linearen, dynamischen Teil des Systems. Zur mathematischen Beschreibung werden die Ströme aller nichtlinearen Schaltungselemente in Abhängigkeit ihrer Klemmenspannungen zusammengefasst, wodurch sich die Systembeschreibung um eine implizite Gleichung erweitert. Die Nicht-

linearität kann, je nach Art der Schaltung, mehrdimensional sein.

Die Schaltungsanalyse und die Beschreibung im erweiterten Zustandsraum erfolgen mit den bekannten Netzwerksätzen. Zunächst wird ein zeitkontinuierliches Modell aufgestellt, bei dem alle unabhängigen Energiespeicher als Zustandsvariablen eingehen. Das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell wird dann in eine zeitdiskrete Formulierung übertragen. In dem dazu benötigten Diskretisierungsschritt können alle gängigen numerischen Integrationsansätze genutzt werden. Die Verwendung der Trapezregel hat sich als geeignet und hinreichend genau erwiesen.

Mit dem Zustandsraummodell in zeitdiskreter Form sind die Berechnungsvorschriften für das digitale Modell vorgegeben. Für die Berechnung von Zuständen und Ausgangsgrößen ist nun die Lösung der impliziten Gleichung notwendig. Diese Beziehung lässt sich als Nullstellenproblem formulieren, welches für jeden Zeitschritt erneut auszuwerten ist. Zwei Realisierungen sind denkbar: Zum einen können alle möglichen Lösungen im Voraus berechnet und in Tabellen bereitgestellt werden. Das Nachschlagen der Lösung erfordert in diesem Fall nur wenige zusätzliche Berechnungen pro Zeitschritt, allerdings werden hohe Speicheranforderungen gestellt. Zum anderen kann das Nullstellenproblem in jedem Zeitschritt erneut gelöst werden. In diesem Fall wird kein Speicherplatz benötigt, allerdings steigt der Berechnungsaufwand stark an. Als Lösungsansätze kommen die klassischen iterativen Methoden in Betracht, wobei sich das einfache gedämpfte Newton-Verfahren besonders eignet. Im Fall parameterabhängiger Schaltungen ist die Laufzeitberechnung die einzig sinnvolle Realisierung. Bei einer tabellierten Lösung würde der Speicher- und Suchaufwand über alle Grenzen anwachsen, da für jeden Parameterwert eine eigene Tabelle bereitzuhalten ist.

Für die Modellierung von Röhrenschaltungen hat sich während der Bearbeitung ein weiterer Schwerpunkt ergeben: Die zur mathematischen Beschreibung der Röhrenkennlinien üblicherweise genutzten Modelle sind nicht für die Simulation von Trioden im Übersteuerungsfall geeignet. Es wird daher ein verbessertes Modell entwickelt, welches das Verhalten realer Trioden auch im Grenzbereich abbildet. Dieses beschreibt neben dem Anodenstrom auch die korrekte Nachbildung des Gitterstroms im Falle positiver Gitterspannungen.

Als Ausgangspunkt für die Modellbildung werden das Raumladungsgesetz sowie die Stromverteilung nach Spangenberg gewählt. Mit dieser Vorgabe wird ein physikalisch motiviertes Fundament gelegt. Durch die Einführung zusätzlicher Parameter erhalten die Modellgleichungen Freiheitsgrade, die eine Anpassung an gemessene Kennlinien ermöglichen. Ein wichtiger Bestandteil der Gleichungen ist eine Kombination aus Exponential- und Logarithmus-

funktion, wie sie in einer einfacheren Formulierung bereits im Röhrenmodell von Koren enthalten war. Darüber hinaus wird ein vereinfachtes Modell entwickelt, bei dem ein von der Anodenspannung unabhängiger Gitterstrom angenommen wird. Eine gute Übereinstimmung zwischen simulierten und gemessenen Kennlinien kann in beiden Fällen nachgewiesen werden.

Zur Prüfung der universellen Anwendbarkeit des Ansatzes wird eine Auswahl repräsentativer Schaltungen aus dem Bereich Gitarrenverstärker/ Effektgeräte untersucht. Die entsprechenden realen Analogschaltungen werden als Referenz vermessen und mit der erweiterten Zustandsraumbeschreibung modelliert. Im gleichen Zuge werden auch die entwickelten Triodenmodelle auf ihre Funktion überprüft. Die mathematische Modellierung wird durch begleitenden Text erläutert. Sinnvolle Vereinfachungen werden begründet, aufgezeigt, in die Berechnung aufgenommen und bewertet.

Für die Beurteilung der Simulationsergebnisse wird die subjektive Größe der klanglichen Übereinstimmung um den Vergleich der messbaren Größen ergänzt. Zu diesem Zweck eingesetzte Messmethoden werden vorgestellt und diskutiert.

Für alle simulierten Schaltungen können sowohl gute bis sehr gute messtechnische Entsprechungen als auch gute klangliche Übereinstimmungen zu den analogen Referenzschaltungen nachgewiesen werden. Daraus lässt sich folgern, dass sowohl der gewählte Zustandsraumansatz als auch die darin eingebundenen Röhrenmodelle eine systematische Modellbildung ermöglichen.

Anhang

A SPICE Modelle

```

1 * CONNECTIONS:  ANODE/PLATE          *
2 *                | GRID              *
3 *                | | CATHODE         *
4 *                | | |               *
5 .SUBCKT 12AT7   A G K
6 *** parameter ~~~~~
7 .PARAMS Cgk=2.3P Cag=1.6P Cak=.2P F=231.4
8 .PARAMS G=0.005071 y=1.277 mu=89.23
9 .PARAMS d1=0.8592 Cg=101.3 r=1.623
10 *** subfunctions ~~~~~
11 .FUNC LX(va,vg) {LOG(1+EXP(F/(1+va)*
12     +(1/mu*va+vg)))*(1+va)/F}
13 .FUNC LX2(va,vg) {LOG(1+EXP(Cg*vg/va))/Cg}
14 .FUNC D(va,vg) {d1*PWR(max(0,vg)/va,2)}
15 *** grid current Ig ~~~~~
16 GIg G K VALUE={G*PWR(LX{V(A,K),V(G,K)},y) *
17     +D{V(A,K),V(G,K)}/PWR(LX2{V(A,K),V(G,K)},r)}
18 *** anode current Ia ~~~~~
19 GIa A K VALUE={G*PWR(LX{V(A,K),V(G,K)},y) *
20     +(1-(D{V(A,K),V(G,K)}/PWR(LX2{V(A,K),V(G,K)},r)))}
21 C1 G K {Cgk}
22 C2 G A {Cag}
23 C3 A K {Cak}
24 .ends

```

Quellcode A.1: LTSPICE Beschreibung für eine ECC81 als Beispiel für die Röhrgleichungen nach Modell 1.

```

1 * CONNECTIONS:  ANODE/PLATE *
2 *                | GRID *
3 *                | | CATHODE *
4 *                | | | *
5 .SUBCKT 12AX7  A G K
6 *** parameter ~~~~~
7 .PARAMS Cgk=2.3P Cag=2.4P Cak=.9P F=447.9
8 .PARAMS K=0.00213 y=1.152 mu=102.8
9 .PARAMS Kg=540U Cg=7.106 xi=1.253 ig0=489N
10 *** subfunctions ~~~~~
11 .FUNC LX(va,vg) {LOG(1+EXP(F/(1+va)*
12     +(1/mu*va+vg)))*(1+va)/F}
13 .FUNC LX2(vg) {LOG(1+EXP(Cg*vg))/Cg}
14 *** grid current Ig ~~~~~
15 GIg G K VALUE={Gg*PWR(LX2{V(G,K)},xi)+ig0}
16 *** anode current Ia ~~~~~
17 GIa A K VALUE={G*PWR(LX{V(A,K),V(G,K)},y)-
18     +Gg*PWR(LX2{V(G,K)},xi)-ig0}
19 C1 G K {Cgk}
20 C2 G A {Cag}
21 C3 A K {Cak}
22 .ends

```

Quellcode A.2: LTSPICE Beschreibung für eine ECC83 als Beispiel für die Röhrgleichungen nach Modell 2.

B

Ermittelte Röhrenparameter

In den Tabellen B.1, B.2, B.3 und B.4 sind die Modellparameter für alle gemessenen Röhren aufgelistet.

Bei den Label-Bezeichnungen wird keine Unterscheidung zwischen Hersteller und „Rebrander“ getroffen, vermerkt ist die aufgedruckte Marke. Im Einzelnen sind das:

EI:	<i>Ei-RC Yugoslavia</i> (SRB),	EGR:	<i>Egro</i> (DDR),
EHX:	<i>Electro-Harmonix</i> (USA),	FWE:	<i>VEB Funkwerk Erfurt</i> (DDR),
GT:	<i>Groove Tubes</i> (USA),	HOG:	<i>Hoges, Hochohmgesellschaft</i> (D),
JJ:	<i>JJ Electronic</i> (SK),	MES:	<i>Mesa-Boogie</i> (USA),
NH:	<i>VEB Röhrenw. Neuhaus</i> (DDR),	RSD:	<i>Röhren Spezial Dienst</i> (DDR/D),
SIE:	<i>Siemens</i> (D),	SOV:	<i>Sovtek</i> (RUS),
TAD:	<i>Tube Amp Doctor</i> (D),	TFK:	<i>Telefunken</i> (D),
TT:	<i>Tube Town</i> (D).		

Alle verzeichneten Größen sind einheitenlos, bis auf die Röhren- und Gitterstromkonstanten

$$K \left[\frac{\text{mA}}{\sqrt{V}^\gamma} \right], \quad K_g \left[\frac{\mu\text{A}}{\sqrt{V}^\xi} \right] \quad \text{und} \quad I_{g0} [\text{nA}].$$

In den Tabellen B.1 und B.2 verweisen die erste und die letzte Zeile auf das gleiche Röhrensystem. Exemplarisch soll daran die Reproduzierbarkeit aufgezeigt werden. Zwischen den beiden Messungen, aus denen die Parameter bestimmt sind, lag ein Zeitraum von ca. 3 Monaten.

Tabelle B.1: Parameter Kathodenstrom, ECC83.

Triode ECC83		C_a konstant				$C_a(U_a)$			
ID	Label	C	K	γ	μ	F	K	γ	μ
1	FW	2,56	1,79	1,162	125,6	529,4	1,84	1,141	125,6
2	RSD	3,04	2,14	1,303	100,8	619,2	2,26	1,253	100,8
3	NH	3,14	1,42	1,341	111,5	563,7	1,45	1,327	111,5
4	SOV	2,29	2,21	1,177	108,6	511,1	2,44	1,089	108,6
5	HOG	3,89	2,23	1,170	109,8	753,8	2,33	1,136	109,8
6	SOV	2,11	2,36	1,114	102,6	501,7	2,58	1,029	102,6
7	JJ	2,91	2,49	1,132	98,3	571,4	2,63	1,079	98,3
8	JJ	3,14	2,32	1,108	98,4	647,1	2,43	1,067	98,4
9	SOV	2,57	1,31	1,366	88,1	414,7	1,38	1,338	88,1
10	MES	2,81	2,22	1,259	113,7	536,5	2,35	1,204	113,7
11	TT	2,68	2,09	1,331	101,1	544,3	2,24	1,266	101,1
12	SIE	2,48	2,21	1,166	100,9	568,6	2,31	1,119	100,9
13	TT	2,55	2,07	1,369	96,1	468,5	2,24	1,311	96,1
14	TT	2,90	2,05	1,310	96,9	585,5	2,16	1,265	96,9
15	TT	3,73	1,63	1,347	97,9	671,5	1,66	1,335	97,9
16	TT	3,73	1,50	1,439	95,3	591,9	1,53	1,429	95,3
17	TT	2,69	2,08	1,297	98,8	549,6	2,21	1,250	98,8
18	TT	2,45	2,14	1,290	97,2	476,5	2,31	1,232	97,2
19	MES	3,12	1,73	1,313	109,7	551,4	1,79	1,287	109,7
20	MES	2,87	2,23	1,230	109,8	563,2	2,35	1,179	109,8
21	MES	2,60	2,18	1,245	105,0	508,5	2,32	1,186	105,0
22	MES	2,73	2,27	1,235	103,3	533,9	2,42	1,175	103,3
23	GT	1,99	1,90	1,264	102,6	415,9	2,14	1,168	102,6
24	GT	2,09	1,93	1,233	102,8	447,9	2,13	1,152	102,8
25	GT	2,12	1,82	1,268	101,6	452,4	2,02	1,179	101,6
26	GT	2,02	1,85	1,278	102,3	419,2	2,08	1,176	102,3
27	EHX	4,56	1,37	1,349	86,9	1198,0	1,37	1,343	86,6
1*	FW	2,57	1,78	1,165	125,7	528,9	1,83	1,143	125,7

Tabelle B.2: Parameter Gitterstrom, ECC83.

Triode ECC83		Röhrenmodell 2				Röhrenmodell 1		
ID	Label	C_g	K_g	ξ	I_{g0}	C_g	δ	ζ
1	FW	7,77	581,2	1,31	248,0	203,1	0,85	-1,68
2	RSD	13,97	605,9	1,35	182,5	167,0	0,56	-1,70
3	NH	27,02	438,5	1,55	305,7	115,3	0,68	-1,73
4	SOV	6,62	609,0	1,13	38,6	936,1	1,15	-1,50
5	HOG	8,58	766,8	1,26	19,9	200,9	0,80	-1,68
6	SOV	4,37	693,0	1,06	-64,0	2449,9	0,91	-1,57
7	JJ	6,15	1067,3	1,05	309,0	371,5	0,81	-1,69
8	JJ	6,55	973,0	1,01	32,0	409,7	0,87	-1,68
9	SOV	8,07	586,6	1,16	555,0	445,4	1,58	-1,47
10	MES	10,34	942,5	1,16	475,1	278,2	0,75	-1,72
11	TT	10,87	565,4	1,46	378,0	150,9	0,62	-1,67
12	SIE	5,90	677,9	1,12	190,9	302,7	0,63	-1,68
13	TT	10,04	601,3	1,48	414,0	145,6	0,70	-1,65
14	TT	8,52	606,2	1,30	534,0	199,5	0,66	-1,65
15	TT	13,24	439,1	1,37	396,0	171,5	0,66	-1,64
16	TT	8,19	449,3	1,46	333,0	195,8	0,92	-1,55
17	TT	9,82	581,9	1,33	309,0	177,7	0,63	-1,66
18	TT	10,51	618,5	1,35	152,0	175,3	0,68	-1,65
19	MES	8,27	851,6	1,08	309,0	446,8	0,87	-1,68
20	MES	8,05	988,2	1,10	486,0	326,4	0,80	-1,71
21	MES	7,22	944,6	1,12	3762,5	341,0	0,77	-1,70
22	MES	7,74	990,1	1,11	194,0	333,7	0,78	-1,70
23	GT	7,63	554,5	1,30	560,7	281,4	0,91	-1,58
24	GT	7,00	539,9	1,25	489	301,1	0,84	-1,59
25	GT	6,40	514,3	1,32	586,8	325,5	1,02	-1,53
26	GT	8,24	535,8	1,34	564,0	249,7	0,88	-1,58
27	EHX	12,42	326,2	1,16	-11,4	223,0	0,53	-1,62
1*	FW	8,11	575,1	1,32	564,0	197,8	0,85	-1,68

Tabelle B.3: Parameter Kathodenstrom, ECC81 und ECC82.

Triode ECC82		C_a konstant				$C_a(U_a)$			
ID	Label	C	K	γ	μ	F	K	γ	μ
28	TAD	0,61	1,23	1,472	19,8	103,1	1,77	1,320	19,8
29	EGR	0,47	0,72	1,501	17,5	69,0	1,52	1,301	17,5
30	JJ	0,63	0,61	1,638	17,1	93,4	0,00	1,528	17,1
31	TAD	0,58	0,93	1,590	18,9	108,7	1,80	1,288	18,9
32	TAD	0,53	0,78	1,609	18,3	94,2	1,58	1,312	18,3
Triode ECC81		C_a konstant				$C_a(U_a)$			
33	VAL	1,25	2,36	1,156	79,1	189,1	2,85	1,065	79,1
34	EI	1,40	2,25	1,340	57,1	256,9	2,69	1,237	57,1
35	TT	0,60	1,10	1,738	41,4	126,8	2,43	1,331	41,4
36	TT	1,63	1,92	1,411	48,2	283,9	2,06	1,378	48,2
37	TFK	1,15	4,05	1,422	74,4	197,4	6,26	1,150	96,7
38	TFK	1,60	4,53	1,316	84,6	231,4	5,07	1,227	89,2

Tabelle B.4: Parameter Gitterstrom, ECC81 und ECC82.

Triode ECC82		Röhrenmodell 2				Röhrenmodell 1		
ID	Label	C_g	K_g	ξ	I_{g0}	C_g	δ	ζ
28	TAD	10,96	409,9	1,30	-654,7	66,3	0,41	-1,52
29	EGR	22,10	535,3	1,16	-832,4	147,2	0,67	-1,44
30	JJ	6,53	341,8	1,48	-814,0	54,1	0,75	-1,39
31	TAD	7,33	304,2	1,32	-642,9	71,6	0,47	-1,39
32	TAD	11,27	265,6	1,33	-622,0	72,7	0,48	-1,37
Triode ECC81		Röhrenmodell 2				Röhrenmodell 1		
33	VAL	4,85	226,8	2	200,1	55,3	0,89	-1,53
34	EI	25,62	717,5	1,11	2,5	236,6	0,70	-1,54
35	TT	16,42	625,9	1,42	150,6	88,3	0,67	-1,56
36	TT	18,59	560,3	1,42	176,1	91,2	0,69	-1,56
37	TFK	10,41	2124	1,39	52,9	105,2	0,68	-1,74
38	TFK	10,57	1374	1,69	115,8	101,3	0,86	-1,62

Literaturverzeichnis

- [AC128] Valvo Halbleiterdioden und Transistoren, 1963, *AC 128 Datenblatt*.
- [Aik99] R. Aiken, "What is blocking distortion?", [online, abgerufen 10. Oktober 2011] <http://www.aikenamps.com/BlockingDistortion.html>, 1999.
- [Amp10] Duncan Amplification, *Tone Stack Calculator, Version 1.3.0.36*, 2010.
- [AS96] T. Araya und A. Suyama, "Sound Effector Capable of Imparting Plural Sound Effects Like Distortion and other Effects", US Patent Nr. 5,570,424, Oktober 1996.
- [Bar98] E. Barbour, "The cool Sound of Tubes", *IEEE Spectrum*, Bd. 8, S. 24–35, August 1998.
- [Ble09] M. Blencowe, *Designing Tube Preamps for Guitar and Bass*, Blencowe, 2009.
- [BPR00] G. Borin, G. De Poli und D. Rocchesso, "Elimination of Delay-Free Loops in Discrete-Time Models of Nonlinear Acoustic Systems", *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, Bd. 8, Nr. 5, S. 597–605, September 2000.
- [BW59] H. Barkhausen und E.-G. Woschni, *Lehrbuch der Elektronenröhren und ihrer technischen Anwendungen, 2. Band: Verstärker*, Verlag S. Hirzel, Leipzig, 7. Aufl., 1959.
- [BW60] H. Barkhausen und E.-G. Woschni, *Lehrbuch der Elektronenröhren und ihrer technischen Anwendungen, 1. Band: Allgemeine Grundlagen*, Verlag S. Hirzel, Leipzig, 9. Aufl., 1960.
- [CH09] I. Cohen und T. Hélie, "Simulation of a Guitar Amplifier Stage for Several Triode Models: Examination of some Relevant Phenomena and Choice of Adapted Numerical Schemes", in *Proc. 127th AES Convention*, Paper 7929, AES, New York, October 2009.

- [CH10] I. Cohen und T. Hélie, “Measures and Parameter Estimation of Triodes, for the Real-time Simulation of a Multi-stage Guitar Preamplifier”, in *Proc. 129th AES Convention*, Paper 8219, AES, San Francisco, November 2010.
- [COCR09] M. Conti, S. Orcioni, M. Caldari und F. Ripa, “Real Time Implementation of Fuzz-Face Electric Guitar Effect”, in *Intelligent Technical Systems*, Bd. 38, S. 89–100, N. Martinez Madrid und R.E.D. Seepold (Herausgeber), Springer, 2009.
- [CRC09] G. C. Cardarilli, M. Re und L. Di Carlo, “Improved Large-Signal Model for Vacuum Triodes”, in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, S. 3006–3009, IEEE, Taipei, Mai 2009.
- [Dan04] D. Danyuk, “Triode Emulator”, in *Proc. 116th AES Convention*, Paper 6008, AES, Berlin, Mai 2004.
- [DHMZ09] K. Dempwolf, M. Holters, S. Möller und U. Zölzer, “The Influence of Small Variations in a Simplified Guitar Amplifier Model”, in *Proc. of the 12th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-09)*, S. 127–132, Como, September 2009.
- [DHMZ10] K. Dempwolf, M. Holters, S. Möller und U. Zölzer, “GEB1- A robust DSP Platform for Audio and Guitar Signal Processing in Education”, in *Proc. European DSP Education & Research Conference (EDERC)*, S. 11–14, Texas Instruments, Nizza, Dezember 2010.
- [DHZ10] K. Dempwolf, M. Holters und U. Zölzer, “Discretization of Parametric Analog Circuits for Real-Time Simulations”, in *Proc. of the 13th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10)*, S. 42–49, Graz, September 2010.
- [DHZ11] K. Dempwolf, M. Holters und U. Zölzer, “A Triode Model for Guitar Amplifier Simulation with Individual Parameter Fitting”, in *Proc. 131th AES Convention*, Paper 8507, AES, New York, Oktober 2011.
- [DMRS98] M. Doidic, M. Mecca, M. Ryle und C. Senffner, “Tube Modeling Programmable Digital Guitar Amplification Systems”, US Patent Nr. 5,789,689, August 1998.

- [Doy93] M. Doyle, *The History of Marshall*, Hal Leonard Corp., 1. Aufl., 1993.
- [DZ11a] K. Dempwolf und U. Zölzer, "Discrete State-Space Model of the Fuzz-Face", in *Proc. of the Forum Acusticum*, S. 455–460, European Acoustics Association, Aalborg, Juni/Juli 2011.
- [DZ11b] K. Dempwolf und U. Zölzer, "A Physically-Motivated Triode Model for Circuit Simulations", in *Proc. 14th Int. Conf. Digital Audio Effects (DAFx-11)*, S. 257–264, Paris, September 2011.
- [ECC81] Valvo Handbuch Rundfunk- und Fernseh-Röhren 1963-64, 1963, *Datenblatt der Zweifachtriode ECC81*.
- [ECC82] Valvo Handbuch Rundfunk- und Fernseh-Röhren 1963-64, 1963, *Datenblatt der Zweifachtriode ECC82*.
- [ECC83] Valvo Handbuch Rundfunk- und Fernseh-Röhren 1963-64, 1963, *Datenblatt der Zweifachtriode ECC83*.
- [EMNW05] G. Engeln-Müllges, K. Niederdrenk und R. Wodicka, *Numerik-Algorithmen*, Springer, 2005.
- [Far00] A. Farina, "Simultaneous Measurement of Impulse Response and Distortion with a Swept-Sine Technique", in *108th AES Convention*, Paper 5093, AES, Paris, Februar 2000.
- [Fet86] A. Fettweis, "Wave digital filters: Theory and practice", in *Proceedings of the IEEE*, Bd. 74, S. 270–327, IEEE, Februar 1986.
- [Fli91] N. Fliege, *Systemtheorie*, Teubner, Stuttgart, 1991.
- [Fre87] E. Freund, *Regelungssysteme im Zustandsraum I*, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1987.
- [Göb05] H. Göbel, *Einführung in die Halbleiter-Schaltungstechnik*, Springer, 1. Aufl., 2005.
- [HDZ11] M. Holters, K. Dempwolf und U. Zölzer, "A Digital Emulation of the Boss SD-1 Super Overdrive Pedal Based on Physical Modeling", in *Proc. 131th AES Convention*, Paper 8506, AES, New York, Oktober 2011.

- [HM00] P. Hatziantoniou und J. Mourjopoulos, "Generalized Fractional-Octave Smoothing of Audio and Acoustic Responses", *J. Audio Eng. Soc.*, Bd. 48, Nr. 4, S. 259–280, April 2000.
- [HZ11] M. Holters und U. Zölzer, "Physical Modelling of a Wah-wah Effect Pedal as a Case Study for Application of the Nodal DK Method to Circuits with Variable Parts", in *Proc. 14th Int. Conf. Digital Audio Effects (DAFx-11)*, Paris, September 2011.
- [KDZ11] O. Kröning, K. Dempwolf und U. Zölzer, "Analysis and Simulation of an Analog Guitar Compressor", in *Proc. 14th Int. Conf. Digital Audio Effects (DAFx-11)*, S. S. 205–208, Paris, September 2011.
- [Kee98] R.G. Keen, "The Technology of the Fuzz Face", [online, abgerufen 21. März 2011] http://www.geofex.com/article_folders/fuzzface/fffram.htm, 1998.
- [Kel03] C.T. Kelley, *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [Kni31] H. Kniekamp, "Die Abweichungen der Verstärkerröhrenkennlinien vom $e^{3/2}$ -Gesetz", *Telegraphen- und Fernsprechtechnik*, Bd. 20, Nr. 3, S. 71–76, 1931.
- [Kon98] M. Konar, "Vacuum Tube Parameter Identification Using Computer Methods", [online, abgerufen 27. Oktober 2011], <http://www.birotechnology.com/articles/VTspice.html>, 1998.
- [Kor96] N. Koren, "Improved VT Models for Spice Simulations", *Glass Audio*, Bd. 5, S. 18–27, 1996.
- [KP06] M. Karjalainen und J. Pakarinen, "Wave digital simulation of a vacuum-tube amplifier", in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'06)*, Toulouse, Mai 2006.
- [Lea95] W. M. Leach, "SPICE Models for Vacuum-Tube Amplifiers", *Journal of the Audio Engineering Society*, Bd. 43, Nr. 3, S. 117–126, März 1995.
- [Lem78] H. Lemme, *Gitarren-Elektronik Teil 2: Gitarrenverstärker*, Frech Verlag Stuttgart, 1978.

- [Mac10] J. Macak, "Verification of Blockwise Method for Simulation of Guitar Amplifiers on a Guitar Tube Preamp", *elektrorevue*, Bd. 1, Nr. 2, S. 16–21, Juni 2010.
- [Mas96] D.C. Massie, "Digital Signal Processor for Adding Harmonic Content to Digital Audio Signals", US Patent Nr. 5,524,074, Juni 1996.
- [McC87] W. J. McCalla, *Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation*, Kluwer, 1987.
- [MD05] L. Moura und I. Darwazeh, *Introduction to Linear Circuit Analysis and Modelling: From DC to RF*, Newnes, 2005.
- [MGZ02] S. Möller, M. Gromowski und U. Zölzer, "A Measurement Technique for Highly Nonlinear Transfer Functions", in *Proc. of the 5th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-02)*, S. 203–206, Hamburg, September 2002.
- [Mül08] S. Müller, "Measuring Transfer-Functions and Impulse Responses", in *Signal Processing in Acoustics*, Bd. 1, S. 74–76, D. Havelock, S. Kuwano und M. Vorländer (Herausgeber), Springer, 2008.
- [MS10] J. Macak und J. Schimmel, "Real-time Guitar Tube Amplifier Simulation Using an Approximation of Differential Equations", in *Proc. of the 13th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10)*, Graz, September 2010.
- [Nau85] D. Naunin, *Einführung in die Netzwerktheorie*, Friedr. Vieweg & Sohn, 2. Aufl., 1985.
- [Pak10] J. Pakarinen, "Distortion Analysis Toolkit - A Software Tool for Easy Analysis of Nonlinear Audio Systems", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Bd. 2010, S. 1–13, 2010. Artikel ID 617325.
- [Pek08] J. Pekonen, "Coefficient-Modulated First-Order Allpass Filter as Distortion Effect", in *Proc. of the 11th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-08)*, Espoo, September 2008.
- [Phi00] E. Philippow, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Verlag Technik Berlin, 10. Aufl., 2000.

- [PK10] J. Pakarinen und M. Karjalainen, "Enhanced Wave Digital Triode Model for Real-Time Tube Amplifier Emulation", *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Special Issue*, Bd. 18, Nr. 4, S. 738–746, 2010.
- [Pot09] A. Potchinkov, *Simulation von Röhrenverstärkern mit SPICE*, Vieweg + Teubner, 1. Aufl., 2009.
- [Pri92] E.K. Pritchard, "Semiconductor Emulation of Tube Amplifiers", US Patent Nr. 5,133,014, Juli 1992.
- [PTK09] J. Pakarinen, M. Tikander und M. Karjalainen, "Wave digital modeling of the output chain of a vacuum-tube amplifier", in *Proc. of the 12th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-09)*, S. 55–59, Como, September 2009.
- [PY09] J. Pakarinen und D.T. Yeh, "A Review of Digital Techniques for Modeling Vacuum-Tube Guitar Amplifiers", *Computer Music Journal*, Bd. 33, Nr. 2, S. 85–100, 2009.
- [Rei41] H.J. Reich, *Principles of Electron Tubes*, McGraw Hill, 1. Aufl., 1941.
- [RK51] H. Rothe und W. Kleen, *Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren*, Geest & Portig, Leipzig, 1951.
- [Sen07] E. Sengpiel, "Wie kann man sich merken, welche Obertöne bei gedackten Pfeifen oder bei Röhrenverzerrungen beteiligt sind?", [online, abgerufen 01. November 2011] <http://www.sengpielaudio.com/WieKannManSichObertoeneMerken.pdf>, 2007. UdK Berlin.
- [Spa42] K. Spangenberg, *Vacuum Tubes*, McGraw Hill, 1942.
- [SST07] F. Santagata, A. Sarti und S. Tubaro, "Non-linear Digital Implementation of a Parametric Analog Tube Ground Cathode Amplifier", in *Proc. of the 10th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-07)*, Bordeaux, September 2007.
- [Tan22] F. Tank, "Zur Kenntnis der Vorgänge in Elektronenröhren", *Jahrbuch drahtl. Telegr. u. Teleph.*, Bd. 20, S. 80, 1922.
- [TS02] U. Tietze und C. Schenk, *Halbleiterschaltungstechnik*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 12. Aufl., 2002.

- [YAS07] D.T. Yeh, J. Abel und J.O. Smith, "Simulation of the Diode Limiter in Guitar Distortion Circuits by Numerical Solution of Ordinary Differential Equations", in *Proc. of the 10th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-07)*, S. 197–203, Bordeaux, Frankreich, September 2007.
- [YAS10] D.T. Yeh, J. Abel und J.O. Smith, "Automated Physical Modeling of Nonlinear Audio Circuits For Real-Time Audio Effects -Part I: Theoretical Development", *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Special Issue*, Bd. 18, Nr. 4, S. 728–737, 2010.
- [YBK08] D.T. Yeh, B. Bank und M. Karjalainen, "Nonlinear Modeling of a Guitar Loudspeaker Cabinet", in *Proc. Digital Audio Effects (DAFx-08)*, Espoo, Finnland, Sept. 1-4 2008.
- [Yeh09] D.T. Yeh, *Digital Implementation of Musical Distortion Circuits by Analysis and Simulation*, Ph.D. Dissertation, Stanford University, Juni 2009.
- [Yeh12] D.T. Yeh, "Automated Physical Modeling of Nonlinear Audio Circuits For Real-Time Audio Effects -Part II: BJT and Vacuum Tube Examples", *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, Bd. 20, Nr. 4, S. 1207–1216, 2012.
- [YS06] D.T. Yeh und J.O. Smith, "Discretization of the '59 Fender Bassman Tone Stack", in *Proc. of the 9th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-06)*, S. 1–6, Montreal, Quebec, Canada, September 2006.
- [Zöl05] U. Zölzer, *Digitale Audiosignalverarbeitung*, B.G. Teubner, Stuttgart, 3., überarbeitete und erweiterte Aufl., 2005.
- [Zöl11] U. Zölzer (Herausgeber), *DAFX Digital Audio Effects*, John Wiley and Sons, New York, 2. Aufl., 2011.
- [Zol10] M. Zollner, *Physik der Elektrogitarre*, Regensburg, (Vorveröffentlichung) 2010.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Kristjan Dempwolf,
geboren am 24.08.1978 in Osterode am Harz

Schule, Ausbildung und Studium

22.06.1998	Allgemeine Hochschulreife, Gymnasium Osterode am Harz
08/1998 – 01/2002	Ausbildung zum Industrieelektroniker Fachrichtung Gerätetechnik, Piller GmbH, Osterode am Harz
10/2002 – 06/2008	Studium der Elektrotechnik, Technische Universität Hamburg-Harburg
07/2006 – 12/2006	Auslandssemester, NTNU Trondheim, Norwegen
22.05.2008	Diplom-Ingenieur Elektrotechnik

Berufstätigkeit

12/1998 – 12/1999	Zivildienst im Rettungsdienst des DRK Osterode
02/2002 – 08/2002	Elektroniker, LISA laser products OHG, Katlenburg- Lindau
07/2008 – 12/2011	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Allgemeine Nachrichtentechnik, Helmut-Schmidt- Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg

