1.6.2 Räumliche Saitenschwingungen

Auf einer Gitarrensaite bilden sich nach dem Anzupfen räumliche Wellen aus. Von besonderer Bedeutung sind die in Kap. 1.1 vorgestellten Querwellen. Nimmt man die Saitenlängsachse als z-Koordinate an, so können sich sowohl in der xz-Ebene, als auch in der yz-Ebene Querwellen ausbreiten; auch Überlagerungen sind möglich. Für Elektro-Gitarren ist die Schwingungsebene senkrecht zur Gitarrendecke besonders bedeutsam, bei Akustik-Gitarren hat auch die deckenparallele Schwingung Auswirkungen.

Die Wellengleichung zeigt eine Orts- und eine Zeitabhängigkeit. Schwingungsuntersuchungen an Gitarrensaiten gehen aber meist von einem festen Ort aus (Tonabnehmer, Steg), so dass nur die Zeit als Variable übrig bleibt. Vereinfachend wird die an einem Ort auftretende Saitenschwingung gerne als Überlagerung vieler exponentiell abklingender Teiltöne betrachtet (Kap. 1.6.3). Hierbei ist aber zu berücksichtigen, dass für jeden Teilton Schwingungen in zwei Ebenen auftreten können. Manchmal hat eine der beiden fast keine Wirkung und kann vernachlässigt werden, manchmal müssen aber auch beide berücksichtigt werden.

Die folgenden Betrachtungen gehen zunächst von der Annahme aus, dass beim Anzupfen zwei räumlich orthogonale Schwingungen *gleicher Frequenz* entstehen. Ihre Dämpfungszeitkonstanten ϑ sind aber unterschiedlich, ihre Wirkung auf den Ausgang ist unterschiedlich, und sie können zueinander phasenverschoben sein. Am Ausgang werden beide überlagert:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \left(e^{-t/\vartheta_1} \cdot \sin(\omega t) + d \cdot e^{-t/\vartheta_2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \right) \qquad d = \text{deckenparalleler Anteil}$$

Speziell bei Akustik-Gitarren koppelt die deckennormale Schwingung gut an das Schallfeld an, wodurch die Schwingungsenergie relativ schnell entzogen wird; die Dämpfungs-Zeitkonstante ist kurz. Die deckenparallele Schwingung strahlt nicht so effizient ab (kleineres d), hat deshalb aber eine größere Zeitkonstante. Die Pegelanalyse ergibt einen Abfall mit einem charakteristischen Knick (**Abb. 1.44**).

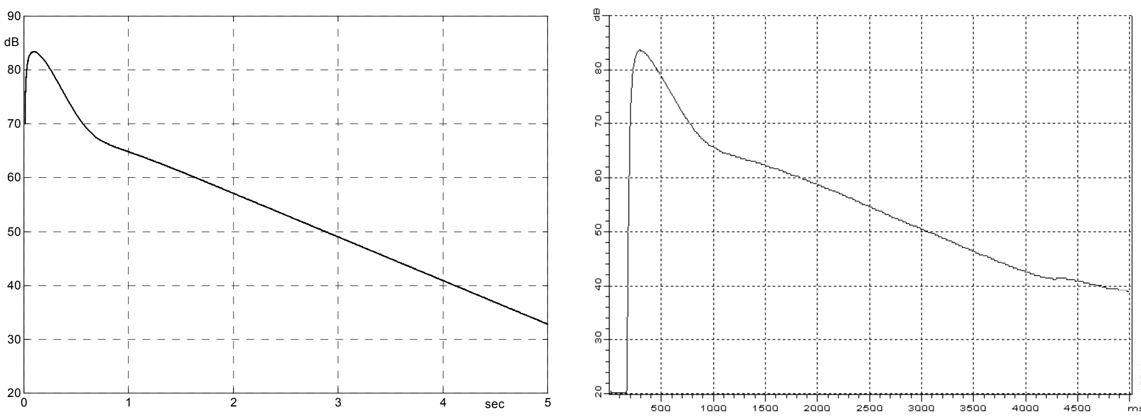

Abb. 1.44: Leere E_2-Saite, FAST-Pegel des 2. Teiltons; *links*: Rechnung, *rechts*: Messung (MARTIN D45V).

Zur Bestätigung der Schwingungshypothesen wurden zwei Experimente durchgeführt: Bei der OVATION Adamas SMT kann zum Einstellen der Halskrümmung eine Abdeckplatte (∅13cm) im Gitarrenboden geöffnet werden; dies verstimmt die Helmholtz-Resonanz, und damit die tieffrequente Schallfeld-Ankopplung. Bei geöffneter Abdeckplatte werden die tiefen Frequenzen schwächer abgestrahlt, die Zeitkonstante müsste verlängert werden.

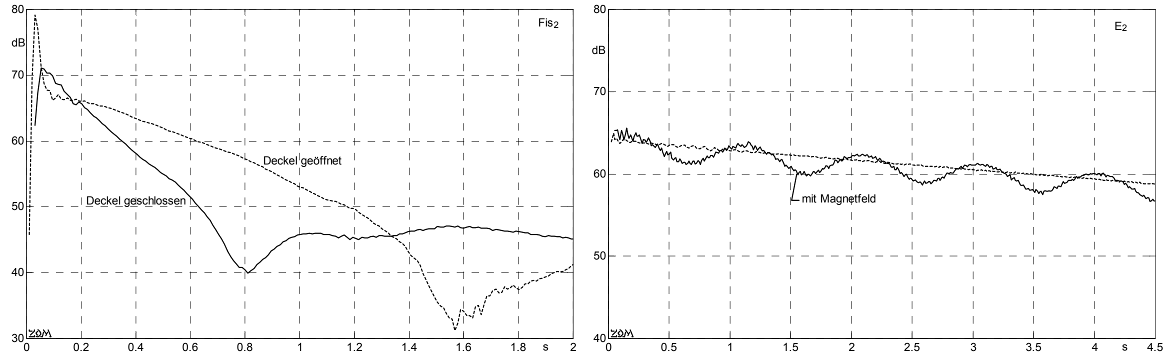

Abb. 1.45: Links: Ovation Adamas SMT, Grundtonpegel (Fis_2), mit geschlossener / geöffneter Abdeckplatte. Rechts: Ovation Viper EA-68, Grundtonpegel (Fis_2), mit / ohne Magnetfeldeinwirkung.

In **Abb. 1.45** (links) sind für den Grundton des auf der tiefen E-Saite am 2. Bund gegriffenen *F#* die Abklingkurven dargestellt; die Messungen bestätigen die Vermutung. Im zweiten Experiment wurde an die tiefe E-Saite einer OVATION Viper ein **Permanentmagnet** angenähert. Durch seine Anziehungskraft wird die Saitensteifigkeit in *einer* Schwingungsebene reduziert, die Schwingfrequenz in dieser Ebene also verringert. Dies bewirkt eine **Schwebung** der nun leicht gegeneinander verstimmten orthogonalen Grundschwingungen (**Abb. 1.45** rechts).

Aber auch ohne Magnetfeld muss die deckennormale Schwingung eines speziellen Teiltones nicht mit exakt derselben Frequenz erfolgen wie die deckenparallele Schwingung desselben Teiltones. Ursache hierfür sind die schwingrichtungsabhängigen Reflexionsfaktoren der Saiteneinspannung (Steg, Sattel). Die Randfedersteifigkeiten können in beiden Schwingungsrichtungen unterschiedlich sein, woraus geringfügige Unterschiede in der Schwingfrequenz entstehen. Im Ausschwingen ergeben sich damit Schwebungen, die den Klang "lebendig" machen. **Abb. 1.46** zeigt Berechnungen und zum Vergleich Schalldruckpegel, die an einer Akustik-Gitarre (MARTIN D45V) gemessen wurden (reflexionsarmer Raum, Mikrofon in 1m Abstand vor der Gitarre). Es treten verschiedene Muster auf:

Der Pegelunterschied der beiden Teilschwingungen bestimmt die *Stärke* der Interferenz. Bei 20 dB Unterschied schwankt die Amplitude nur um 10%, bei 6 dB Unterschied um 50%. Die Unterschiede in der Dämpfung bestimmen, über welchen *Zeitraum* die Schwebung auftritt. Klingen beide Teilschwingungen mit gleicher Dämpfung ab, so ändert sich der Pegelunterschied und damit die Schwebungsstärke nicht, bei unterschiedlichem Abklingen ist die Schwebung in dem Moment am stärksten, in dem beide Pegel gleich sind. Der Frequenzunterschied bestimmt die *Hüllkurvenfrequenz*; je größer der Frequenzunterschied, desto schneller die Schwankung. Schließlich ist die *Phase* der Teilschwingungen von Bedeutung: Insbesondere bei unterschiedlicher Dämpfung, wenn die Schwebung also auf einen kurzen Zeitausschnitt begrenzt ist, wird ein Interferenzloch nur sichtbar, wenn während dieses Zeitausschnittes die beiden Teilschwingungen gegenphasig sind.

Ein weiterer Freiheitsgrad ergibt sich, wenn auch **Nichtlinearitäten** zugelassen werden. Beispielsweise kann die Reibung von einer höheren Schnellepotenz abhängen, oder es ändert sich die Federsteifigkeit in Abhängigkeit von der Auslenkung. Als Folge fällt dann z.B. der Pegel einer monofrequenten Schwingung nicht mehr linear über der Zeit ab, sondern gekrümmt. Derartige Probleme fordern einen hohen Aufwand – sie werden nicht untersucht.

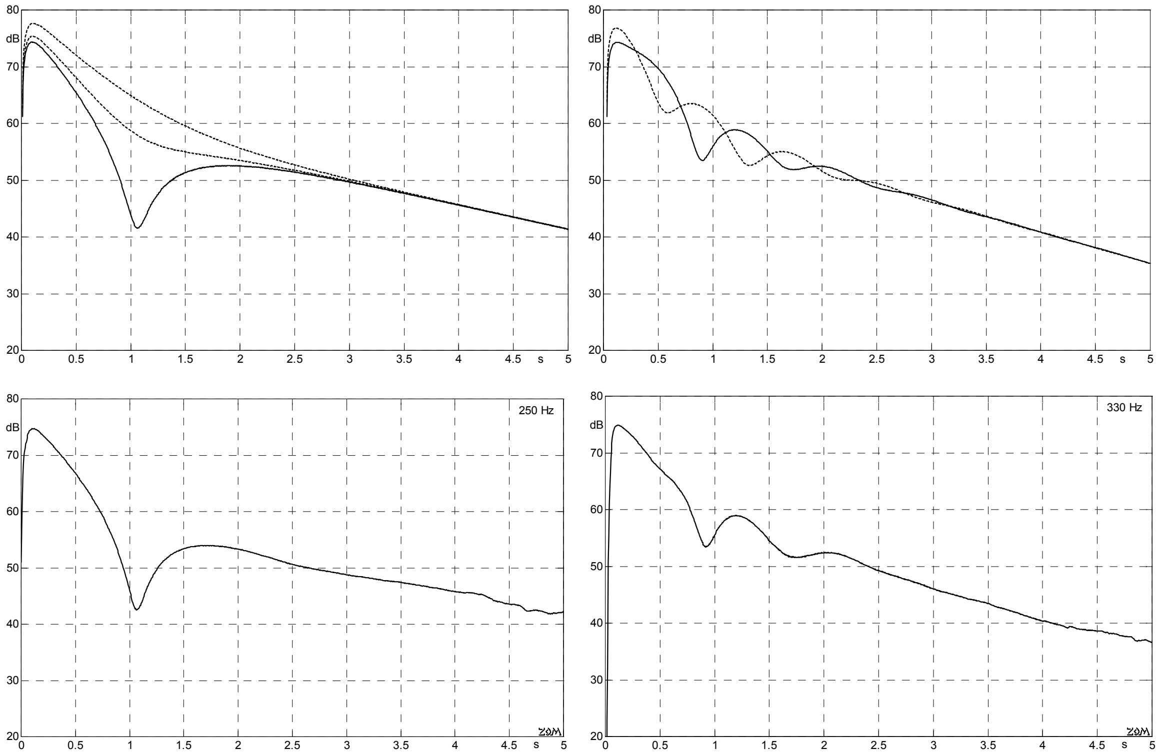

Abb. 1.46 oben: Abklingvorgänge mit unterschiedlicher Phasendifferenz. Links = Gleiche Frequenz der beiden Schwingungen, rechts = Schwebung mit 1.2 Hz Frequenzunterschied. Die Dämpfung kann aus der anfänglichen Kurvensteigung nicht mehr präzise bestimmt werden. **Unten:** Messungen an einer MARTIN D45V

Eine interessante Kurvenschar erhält man, wenn die Anregungs-Energie konstant bleibt, und nur die Saitenbedämpfung variiert. Hierbei ist es erforderlich, den Begriff "Bedämpfung" zu präzisieren: Jede reale Saite führt eine bedämpfte (auch: 'gedämpfte') Schwingung aus. In diesem Fall bedeutet **Dämpfung**, dass der Saite kontinuierlich Schwingungsenergie entzogen wird, wodurch die Auslenkungs-Amplitude (potentielle Energie) und die Schnelle-Amplitude (kinetische Energie) im Laufe der Zeit abnehmen. Federn und Massen speichern Energie, Widerstände "vernichten" Energie (Verlustwiderstand). Natürlich kann Energie nicht wirklich vernichtet werden; sie wird in Wärme umgewandelt, steht damit aber für die Saitenschwingung nicht mehr zur Verfügung.

Bei der **Akustik-Gitarre** ist nun zwischen 'gutem' und 'schlechtem' Verlust zu unterscheiden. Wenn die gesamte Saitenenergie mit 100% Wirkungsgrad in Schallenergie umgewandelt wird, tritt zwar eine Dämpfung (ein Verlust) auf, aber das Ziel der Schallerzeugung ist auf das Effizienteste erreicht worden. Wenn hingegen durch innere Reibung 90% der Saitenenergie direkt in Wärme umgewandelt und nur 10% abgestrahlt werden, entsteht ein unerwünschter Verlust. Ein BEISPIEL soll dies verdeutlichen: Aus einer Gießkanne wird ein Blumentopf mit Wasser versorgt. Tritt das Wasser aus einem kleinen Querschnitt aus, so dauert es lange, bis die Kanne leer ist; bei großem Querschnitt geht's schneller – aber immer kommt das ganze Wasser im Blumentopf an. Dies ändert sich, wenn ein Loch im Kannenboden ist, hiermit ergibt sich ein zusätzlicher Freiheitsgrad, der den Wirkungsgrad beeinflusst ◊. Auf die Saite übertragen: Durch gute Kopplung zwischen Saite und Schallfeld fließt die Energie schnell von der Saite ab, die Saite wird stark bedämpft, aber alle Energie kommt im Schallfeld an (100% Wirkungsgrad). Erst wenn in der Gitarre ein Wirkwiderstand (Reibung) enthalten ist, sinkt der Wirkungsgrad.

Bei **Elektro-Gitarren** ist die Zielsetzung ganz anders: Sie müssen keine Schallenergie abstrahlen – das besorgt der Lautsprecher. Wegen der fehlenden Abstrahlverluste ist die Saitenbedämpfung geringer, das Ausklingen dauert länger, die Gitarre hat ein längeres **Sustain**.

Es gibt mehrere Größen zur Dämpfungs-Beschreibung: Eine ist die Dämpfungszeitkonstante bzw. **Hüllkurvenzeitkonstante** ϑ der einzelnen Teiltöne. Pro Zeitkonstante nimmt der Teiltonpegel um 8,686 dB ab. Eine Schwingung, deren Pegel in 10 s um 60 dB abnimmt, hat eine Zeitkonstante von 1,45 s. Die Zeitdauer, die der Pegel für einen Abfall um 60 dB braucht, wird in der Raumakustik **Nachhallzeit** $\boldsymbol{T_N}$ genannt. Auch sie ist zur Dämpfungs-Beschreibung geeignet, es gilt $T_N = 6{,}91 \cdot \vartheta$. In **Abb. 1.47** sind die mit Piezo-Tonabnehmer gemessenen Grundton-Pegelverläufe (*G#*) dargestellt. Während der ersten Sekunde unterscheiden sich die Zeitkonstanten um den Faktor 18.

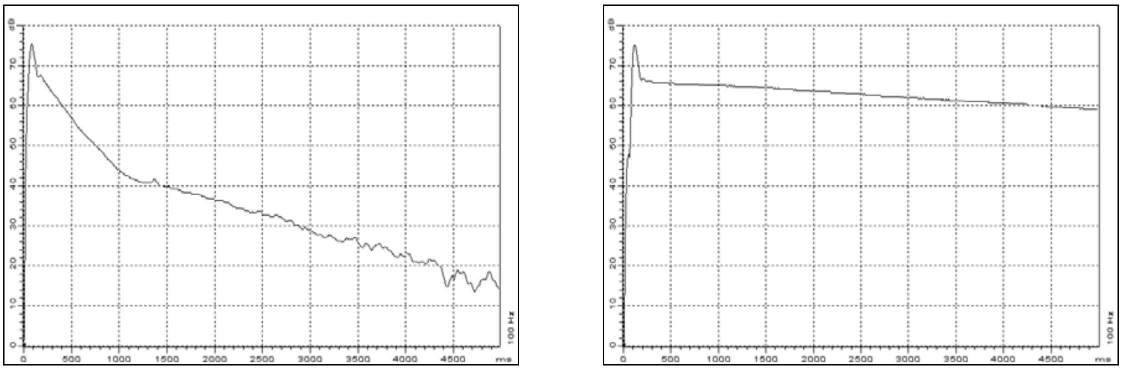

Abb. 1.47: Messungen an Ovation-Gitarren: SMT (Akustik-Gitarre, links); Viper (Elektro-Gitarre, rechts).

Den folgenden Betrachtungen liegt der Energiesatz zugrunde. Der Saite wird beim Anzupfen eine bestimmte potentielle Energie mitgegeben, die teils dissipiert, teils abgestrahlt wird. Als BEISPIEL soll eine Saite mit 5 mWs angezupft werden und unterschiedlich bedämpft ausschwingen. Welcher Schallpegel entsteht in 1 m Entfernung, wenn man zunächst annimmt, dass 100% der Schwingungsenergie als **Schallwelle** abgestrahlt werden?

Für die genaue Berechnung müsste die Bündelung bekannt sein, vereinfachend wird hierbei Kugelcharakteristik angenommen. Für den pegelstarken zweiten Teilton der E-Saite ist diese Annahme eine gute Näherung [1]. Die Energie *E* der Kugelwelle [3] berechnet sich zu:

$$E = \frac{4\pi R^2}{Z_0} \int_0^\infty p^2(t)dt = \frac{4\pi R^2}{Z_0} \cdot \frac{\hat{p}^2}{4} \cdot \vartheta \qquad \text{mit } Z_0 = 414 \text{ Ns/m}^3$$

$p(t)$ ist hierbei der Schalldruck in der Entfernung R = 1m; das Integral über die gedämpfte Schwingung wurde bereits am Ende von Kap. 1.5.1 berechnet. Die Gleichung kann nach der Schalldruckamplitude aufgelöst werden:

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{Z_0}{\pi R^2} \cdot \frac{E}{\vartheta}} \qquad \text{im Beispiel} \quad \hat{p} = 0{,}57\,\text{Pa} \quad \text{für } \eta = 100\% \text{ und } \vartheta = 2\,\text{s}.$$

Aus dem nunmehr bekannten Schalldruckverlauf kann der Pegelverlauf für z.B. exponentielle FAST-Mittelung berechnet werden (**Abb. 1.48 links**, unterschiedliches ϑ). ◊

$$L(t) = 10\lg\left(\frac{Z_0 E / p_0}{2\pi R^2 (\vartheta - 2\tau)} \cdot \left(e^{-2t/\vartheta} - e^{-t/\tau} \right) \right) \qquad \vartheta \neq 2\tau$$

Die Dämpfungszeitkonstante ϑ beeinflusst sowohl den Maximalwert, als auch die Abklinggeschwindigkeit. Der Gitarrenbauer kann durch gute mechano-akustischen Kopplung den Spitzenschallpegel erhöhen, dann klingt die Lautstärke aber schnell ab; oder durch schlechte Kopplung ein langes Ausklingen erreichen, dann ist die Gitarre aber nicht so laut – die Anzupf-Energie ist eben nur einmal vorhanden. Lässt man nun aber die Saite in zwei Ebenen schwingen, so gelingt das scheinbar Unmögliche: Eine laute, lang nachklingende Gitarre. Die deckennormale Schwingung erzeugt einen lauten Anschlag, dessen schnelles Ausklingen von der langsamer abklingenden deckenparallelen Schwingung nach kurzer Zeit übertönt wird.

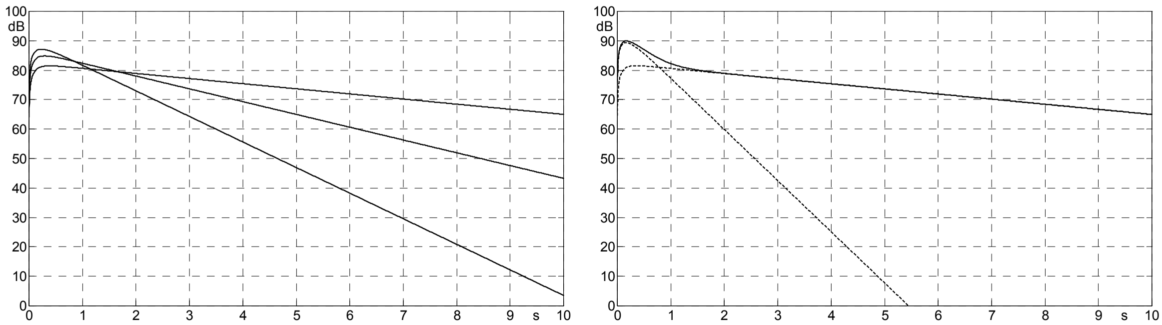

Abb. 1.48: Links: FAST-Schallpegel für unterschiedliche Kopplung zwischen Saite und Schallfeld (η = 100%). Rechts: FAST-Schallpegel für zwei überlagerte orthogonale Schwingungen (η = 100%). Gleiche Energie.

Abb. 1.48 rechts zeigt ein Beispiel, bei dem beide Schwingungen mit 5 mWs angeregt werden. Das schnelle Abklingen erfolgt mit 0,5 s Dämpfungszeitkonstante, das langsame Abklingen mit 5 s. Gestrichelt eingetragen ist der Pegelverlauf der Einzelschwingung. Für beide Schwingungen ist wieder ein 100%-iger Wirkungsgrad angenommen.

Ein **Wirkungsgrad** von 100% ist in der Praxis natürlich nicht erreichbar, ein Teil der Schwingungsenergie wird bereits in der Saite und im Korpus in Wärme umgewandelt. Reduziert man den Wirkungsgrad auf z.B. 50%, so wird hierdurch auch die Abklingzeitkonstante auf die Hälfte reduziert (Herleitung über die Leitungsgleichung). Der Pegelverlauf wird dann von zwei Parametern bestimmt: Von der mechano-akustischen Anpassung, und von der Gitarrendissipation (**Abb. 1.49**).

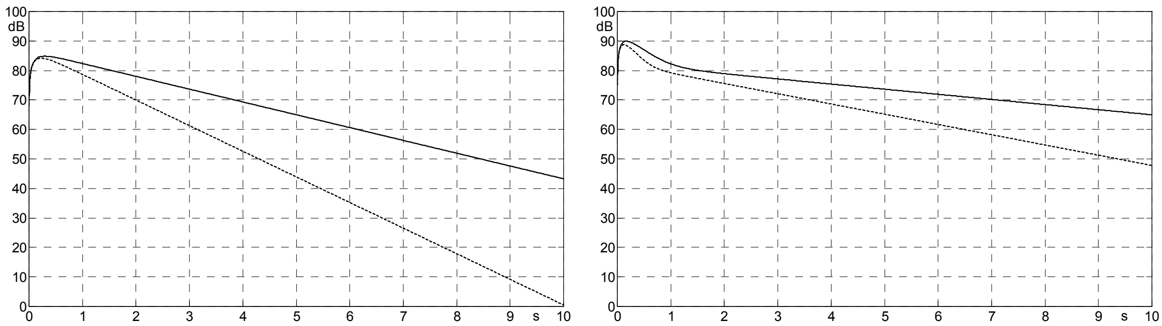

Abb. 1.49: Berechneter Schallpegelverlauf für 5 mWs (links) bzw. 2*5 mWs (rechts) Anregungsenergie. Die durchgezogene Linie zeigt 100 % Wirkungsgrad, die gestrichelte Linie 50%.