

7.6 Schwingungsmesstechnik

Jede theoretische Beschreibung muss sich der Evaluierung durch die praktische Anwendung stellen. Natürlich wird eine Schwingungsgleichung niemals die Bewegungen einer realen Saite vollständig erfassen können – das muss sie aber auch nicht, denn sonst wäre sie unendlich kompliziert. Vielmehr bietet die Mathematik theoretische Modelle an, und es ist Aufgabe der Praxis, die Grenzen dieser Modelle zu erkennen. Die folgenden Kapitel sollen helfen, dass diese praktische Evaluierung nicht selbst zum Unsicherheitsfaktor wird.

7.6.1 Impedanz- / Admittanzmessungen

Die mechanische Impedanz $\underline{Z} = \underline{F} / \underline{v}$ ist der Quotient aus Kraft und Schnelle, die Admittanz \underline{Y} ist der Kehrwert hiervon. Ein typischer Sensor zum Messen der Impedanz ist der Impedanzmesskopf, ein im Falle des B&K 8001 fingerhutgroßer Zylinder, der in seinem Innern zwei Piezokristalle zum Messen der Kraft und der Beschleunigung enthält, die, zeitlich integriert, die Schnelle ergibt. Nun verändert aber jede Messung die zu messende Größe: Manchmal so gut wie gar nicht (Strahlungsdruck bei berührungslosen Lasermessungen), manchmal in erheblichem Umfang, wie z.B. bei Impedanzmessungen. Der Kraftsensor sitzt nämlich nicht direkt am Messpunkt, sondern *im* Impedanzkopf. Vom Kraftsensor geht es über eine gummi-gelagerte Mutter an die Außenwelt, und da es keine masselose Mutter geben kann, müssen ca. 1 g parasitäre Masse m_0 berücksichtigt werden. Und, so man hochfrequent messen möchte, weitere Artefakte. Eine Messung am unbelasteten Impedanzkopf zeigt **Abb. 7.49**:

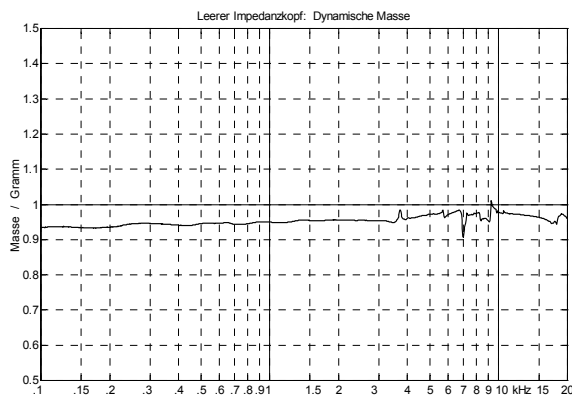
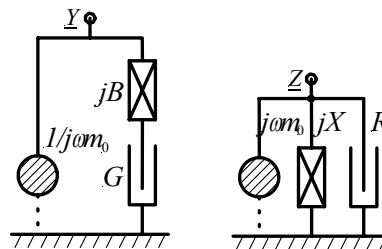


Abb. 7.49: Links: Betrag der mitschwingenden komplexen Masse $\underline{F}/\underline{a}$ des Impedanzkopfes. Unten: Kraftflussdiagramm der Ersatzsysteme.



Hier ist der Betrag der komplexen Masse dargestellt, die knapp 1g beträgt. Durch einen in die Mutter eingeschraubten Taststift wird die parasitäre Masse noch vergrößert, so dass insgesamt z.B. 1,3 g parasitäre Masse auftreten, die scheinbar *vor* dem Messobjekt (zwischen Messkopf und Messobjekt) wirken. Im Kraftflussdiagramm ist m_0 aber parallel zum Messobjekt anzusetzen, weil sich die Flussgröße Kraft [3] auf zwei Wege aufteilt: Die Trägheitskraft für m_0 , und die Kraft \underline{F}_M in das Messobjekt: $\underline{F} = \underline{a} \cdot m_0 + \underline{F}_M$. Die Impedanz \underline{Z}_M des Messobjektes wird hierdurch vergrößert: $\underline{Z} = \underline{Z}_M + j\omega m_0$. Diese Problematik war auch dem Hersteller bekannt, deshalb wurde eine **Massenkompensationseinheit** B&K 5565 angeboten. Ihr Gebrauch ist nicht ohne Tücken, doch auf diese Details soll hier nicht mehr eingegangen werden, da sie aus heutiger Sicht als veraltet gilt. Auch auf Polaritäts-Wunderlichkeiten (der B&K 2625 invertiert, der B&K 2623 nicht) soll nur mit diesem einen Satz hingewiesen werden, obwohl ihre Missachtung den halben Urlaub kosten kann ...

Eine zeitgemäße Variante der Massenkompensation wurde schon in Kap. 6 vorgestellt, deshalb sollen an dieser Stelle nur mehr die Auswirkungen einer nicht kompensierten parasitären Masse erläutert werden. Zerteilt man die **Impedanz** Z in ihren Realteil R und ihren Imaginärteil X , erkennt man, dass durch ωm_0 nur die Reaktanz X vergrößert wird. Falls also nur die Resistanz R interessiert, kann auf eine Massenkompensation gänzlich verzichtet werden. Bei der **Admittanz** Y hat ωm_0 aber Auswirkungen auf Suszeptanz B und Konduktanz G :

$$\underline{Y} = \frac{1}{1/\underline{Y}_M + j\omega m_0} = \frac{G + jB}{(1 - \omega m_0 B) + j\omega m_0 G} = \frac{G + jB(1 - \omega m_0 B)}{(1 - \omega m_0 B)^2 + (\omega m_0 G)^2}; \quad \text{mit } \underline{Y}_M = G + jB.$$

Aus der Konduktanz $G = \text{Re}(\underline{Y}_M)$ des Messobjektes wird ein komplizierter Term, der nur in Ausnahmefällen näherungsweise G entspricht (Nenner $\rightarrow 1$). Generell wird die Abweichung um so kleiner, je kleiner die parasitäre Masse m_0 ist, und je niedriger die Frequenz ist. In **Abb. 7.50** ist die Auswirkung einer 2-g-Masse auf eine Konduktanzberechnung zu sehen. Da nur schwer vorhergesagt werden kann, wie groß die Messfehler ohne Massenkompensation werden, sollten Admittanzen generell nur mit Massenkompensation gemessen werden.

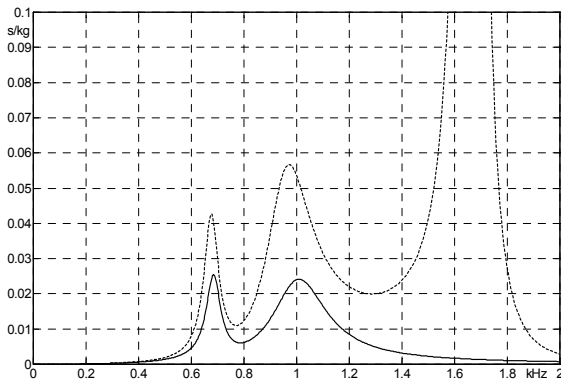


Abb. 7.50: Konduktanz ohne (—) und mit (---) 2 g parasitärer Zusatzmasse. Bei 1,7 kHz entsteht aus dem Zusammenwirken von Lagerfederung und Zusatzmasse eine zusätzliche Resonanzspitze.

Für alle hier vorgestellten Analysen wurden das Kraft- und das Beschleunigungssignal des Impedanzkopfes mit einer Cortex-Workstation (CF-100) aufgezeichnet; die Massenkompensation erfolgte rechnerisch über die Hilbert-Transformation. **Abb. 7.51** zeigt das typische Rauschspektrum des Messaufbaus: Wie man sieht, ist das **Eigenrauschen** der Workstation gegenüber dem Sensorrauschen vernachlässigbar. Mit 400 mV/N und 35 mV/g war der verwendete Impedanzkopf ausreichend empfindlich, um auch kleine Signale messen zu können, hierzu war aber eine problemangepasste Dynamikoptimierung unerlässlich.

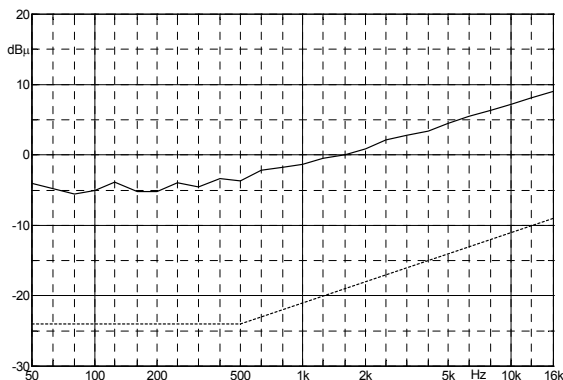


Abb. 7.51: Terzanalyse des Systemrauschens: Impedanzkopf mit Ladungsverstärker (—); Analysator Cortex CF-100 (---). 0 dBμ \leftrightarrow 1 μ V.

Dynamikoptimierung bedeutet, die Signaldynamik an die Systemdynamik anzupassen. Also einerseits verhindern, dass schwache Nutzsignale im Rauschen untergehen, und andererseits Übersteuerungen vermeiden. Dies gelingt meist gut, wenn nur bei einer Frequenz gemessen werden soll, kann bei Breitbandmessungen aber schwierig werden. In **Abb. 7.52** sind für den unbelasteten Impedanzkopf Kraft und Beschleunigung dargestellt; beide Größen ändern sich über der Frequenz nur um 1:20, das ist gut beherrschbar.

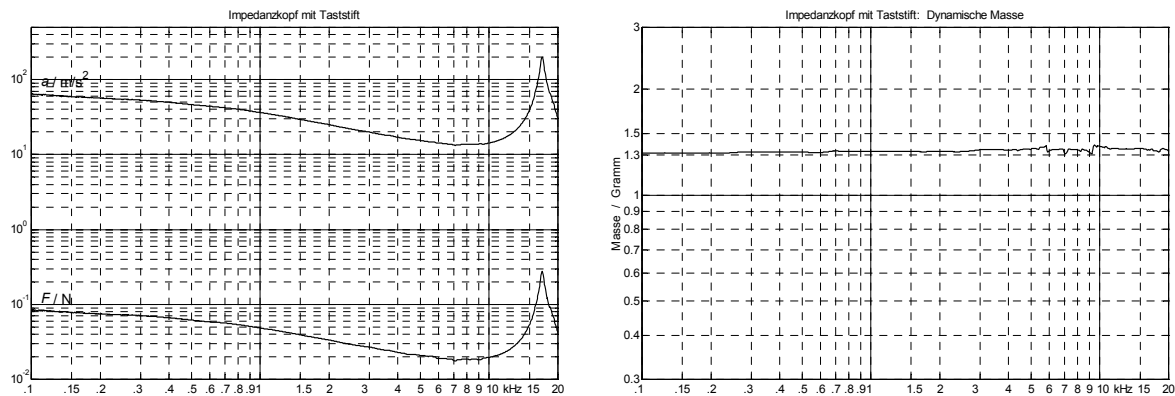


Abb. 7.52: Mech. Leerlauf: Kraft und Beschleunigung (links), Dynamische Masse (rechts); $U_{\text{Shaker}} = 2 V_{\text{eff}}$.

Ein unbelasteter Impedanzkopf (Leerlauf, Lastimpedanz = 0) stellt das eine Extrem dar, das andere Extrem ist der festgebremste Kopf (Kurzschluss, Lastimpedanz = ∞). Im Leerlauf offenbart sich die parasitäre Masse, im Kurzschluss wird die Steifigkeit der Tastkopfspitze erkennbar – allerdings nur näherungsweise, denn ein völlig bewegungsloses Widerlager ist nicht realisierbar. Zur Messung der Steifigkeit wurde die Tastkopfspitze gegen einen 200 kg schweren Steintisch gerichtet, das Ergebnis zeigt **Abb. 7.53**: Es ergibt sich eine Feder mit einer Steifigkeit von $s = 6 \text{ MN/m}$, die zusammen mit der parasitären Masse (1,3 Gramm) eine Resonanz bei 11 kHz erzeugt. Die Kraft variiert bei dieser Messung um 1:1000, was angesichts der Analysator-Dynamik (100 dB) kein Problem sein dürfte. Berechnet man allerdings die für 1 mN vom Sensor (400 mV/N) erzeugte Spannung, erhält man nur 400 μV – das geht bei der Breitbandmessung im Rauschen des bei dieser Messung verwendeten älteren Ladungsverstärkers (2625) unter. Die auf die Hilbert-Transformation folgende kohärente Mittelung schafft es dann aber doch noch, bei 11 kHz eine Resonanz zu finden. Nicht korrekt wiedergegeben wird bei der Breitband-Messung hingegen das Kraft-Minimum: Hier detektiert die Messung (Abb. 7.53) nur noch Sensorrauschen. (Selektive Messung \rightarrow Abb. 7.56a).

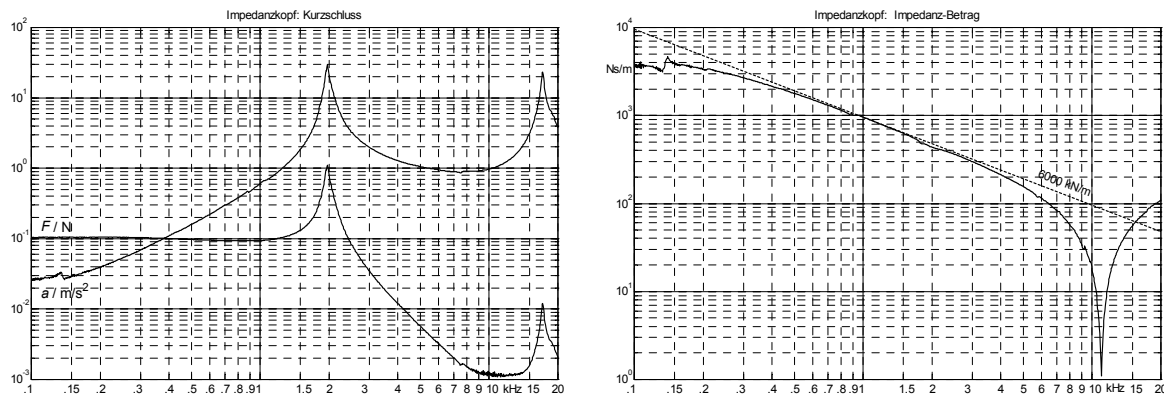


Abb. 7.53: Mech. Kurzschluss: Kraft und Beschleunigung (links), Impedanz-Betrag (rechts); $U_{\text{Shaker}} = 0,1 V_{\text{eff}}$. Die Impedanzmessung (rechts) erfolgt frequenzselektiv, F und a (links) werden breitbandig gemessen.

Ab welcher Anregungsamplitude eine Struktur wesentliche **Nichtlinearitäten** erzeugt, ist nur schwer vorhersehbar. Keinesfalls darf die im Shaker-Datenblatt spezifizierte Aussteuerungsgrenze als Richtwert für lineares Verhalten angesetzt werden. Die dort angegebene maximal zulässige Betriebsspannung von $7 V_{\text{eff}}$ (B&K 4810) ist ein thermischer Grenzwert, der im vorliegenden Fall zu völlig unbrauchbaren Ergebnissen geführt hätte. Selbst mit nur $0,25 V_{\text{eff}}$ zeigten sich im Bereich der 1,9-kHz-Spitze schon deutliche Nichtlinearitäten, erst bei $0,1 V_{\text{eff}}$ waren die nichtlinearen Verzerrungen ausreichend klein – das Rauschen allerdings bereits zu groß. Was zu der Frage führt, welches Steuersignal hierfür optimal ist.

Die beiden klassischen Anregungssignale zur Frequenzgangmessung sind der Sweep und das Pseudo-Rauschen. Beim **Sweep** (Gleitsinus) erhöht sich die Frequenz eines Sinustones über der Zeit, die Amplitude bleibt konstant. **Pseudo-Rauschen** ist ein spezielles Rauschen, das sich nach der Periodendauer T wiederholt. Sein Dichtespektrum ist konstant (weiß), seine Periodendauer entspricht der Blocklänge der Analyse-DFT, also z.B. bei 48 kHz Abtastfrequenz und $N = 4096 \Rightarrow T = 85,3$ ms. Wegen der starken Zeitvarianz des Kurzzeitspektrums muss (!) auf zeitliche Gewichtungsfenster verzichtet werden, was aber keinen Nachteil darstellt, da die Analyse wegen Periodengleichheit leakagefrei ist. Auch rein stochastisches (z.B. normal- oder gleichverteiltes) weißes Rauschen ist geeignet, dann sind aber Fensterung und Mittelung erforderlich.

Sehr grundsätzlich betrachtet kann die Frequenzabhängigkeit der Signal- und Systemgrößen auf drei Arten ermittelt werden: Selektive Anregung und breitbandige Messung, breitbandige Anregung und selektive Messung, sowie selektive Anregung und selektive Messung. Die typische Sweepmessung gehört zur ersten Gruppe, die typische Rauschanregung zur zweiten. Beide Messverfahren haben ihre Nachteile, wenn das System wesentliche Nichtlinearitäten zeigt. Wird bei Sweepanregung breitbandig gemessen, können Rauschstörungen das Erfassen selektiver Minima verhindern, wie in Abb. 7.53 um 11 kHz bei der Kraft deutlich wird. Rauschanregung, gepaart mit selektiver Analyse, liefert hier bessere Ergebnisse, kann bei Verzerrungen aber zu falschen Schlüssen verleiten: Eine bei 1 kHz auftretende Signalbegrenzung verändert das Analyseergebnis bei anderen Frequenzen. In **Abb. 7.54** wird als Beispiel am Ausgang eines Bandpass-Systems eine arctan-Funktion als **Nichtlinearität** eingefügt; die durch eine DFT ermittelte Übertragungsfunktion verbiegt sich mit zunehmender Verzerrung immer mehr – aber nicht in erster Linie bei 1 kHz, sondern bei 3 kHz (k_3), sowie tieffrequent (Differenztöne). Würde diese Nichtlinearität im Signalfluss vor den Bandpass gesetzt, wäre sogar das gesamte Messergebnis unbrauchbar.

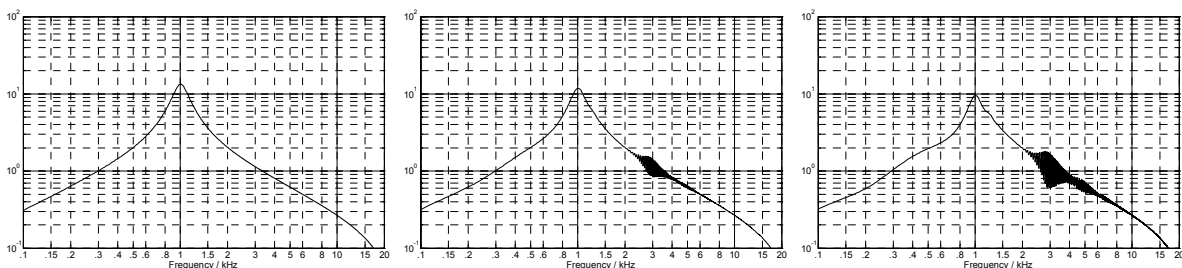


Abb. 7.54: Systemanalyse mit Pseudo-Noise und DFT: Keine/schwache/stärkere Nichtlinearität (v.l.n.r.).

Wenn mechanische Systeme über mehrere Frequenzdekaden analysiert werden sollen, kann die gemessene Größe um 10^5 variieren; ein Klirrfaktor von "nur" 0,1% ist dabei schon ein ernstes Problem. Der Analysator mag ja 0,001% Klirrfaktor haben, der Sensor eher nicht. Und die Verzerrungen des Aktors können sogar 1% überschreiten.

Begrenzt man den Gleitsinus der **Sweepmessung** durch die arctan-Funktion (Nichtlinearität *vor* der Systemresonanz), erhält man ein ganz anderes Ergebnis: Für Frequenzen um 333 Hz verstärkt die Resonanz die durch die Nichtlinearität entstandene 3. Harmonische, hingegen ist der höhere Frequenzbereich frei von selektiven Fehlern (**Abb. 7.55**). Erfolgt die nichtlineare Begrenzung *nach* der Systemresonanz, werden Maxima tendenziell zu klein dargestellt.

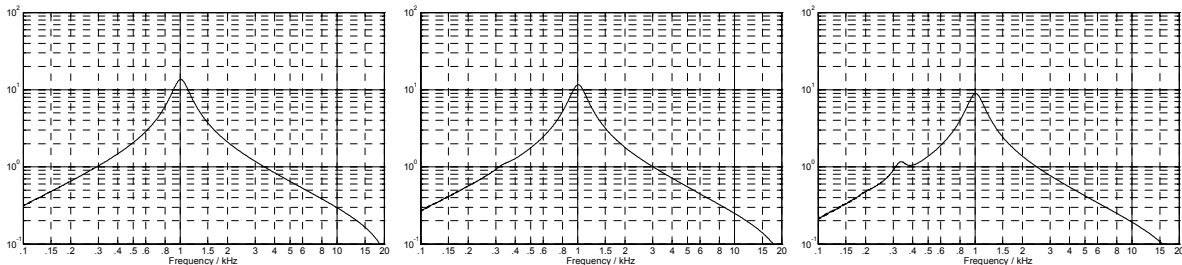


Abb. 7.55: Systemanalyse mit Sweep: Keine/schwache/stärkere Nichtlinearität *vor* der Resonanz (v.l.n.r.).

Am wenigsten reagiert die Sweepmessung auf Nichtlinearitäten, wenn das Ausgangssignal des zu messenden Systems mit einem **Mitlauffilter** schmalbandig gefiltert wird (selektive Anregung, selektive Messung). Bei besonders großer Signaldynamik kann zusätzlich die Frequenzabhängigkeit der Sweep-Amplitude an das System angepasst werden. Natürlich ist auch beim Pseudorauschen eine dementsprechende Filterung möglich, die Periode wird hierdurch ja nicht geändert. In **Abb. 7.56a** ist der Vergleich zwischen einer Sweep-Messung *mit* bzw. *ohne* Mitlauffilter dargestellt – das Ergebnis spricht für sich.

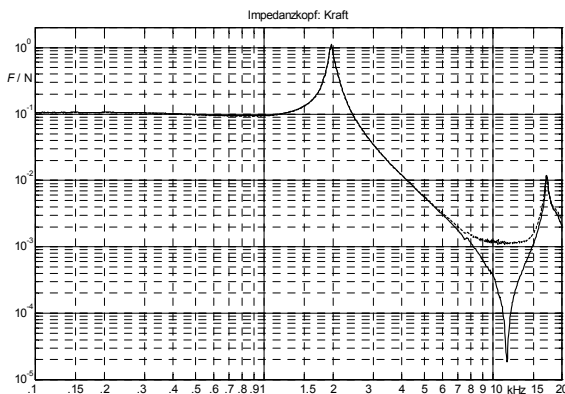


Abb. 7.56a: Kraftmessung, Tastkopfspitze gegen den Steintisch gerichtet. Ohne (----) bzw. mit (—) Mitlauffilter. Die Kraft ändert sich über der Frequenz um 1:70000; ein derart großer Dynamikbereich ist nur mit selektiver Messung beherrschbar.

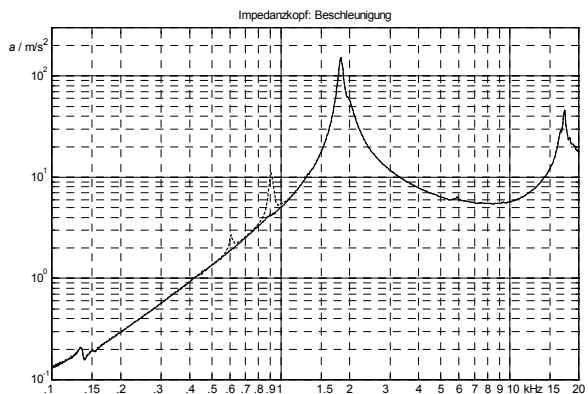


Abb. 7.56 b: Beschleunigungsmessung, wie 7.6.8a. Ohne (----) bzw. mit (—) Mitlauffilter. Bei 600Hz und 900Hz regen Nichtlinearitäten die 1800-Hz-Resonanz an.

Ein besonderes Problem bei mechanischen Impedanzmessungen sind Kraftfluss-Unterbrechungen. Der Shaker-Taststift kann ja nicht mit dem Gitarren-Steg (bzw. -Bund) verschleißt werden, er wird stattdessen durch eine konstante **Vorlast** aufgedrückt. Die größte zulässige Kraft ist beim B&K 4810 ca. 6 N; hierbei wird aber der Schwingtisch schon an seine Grenze ausgelenkt, und arbeitet stark nichtlinear. 3 N Vorlast wäre der theoretisch optimale Wert, hierbei darf eine Wechselkraft von maximal $2 N_{\text{eff}}$ überlagert werden. Verringern der Vorlast erhöht die Gefahr, dass der Taststift abhebt, Vergrößern der Vorlast produziert einseitige Kraftbegrenzungen, d.h. Nichtlinearitäten. Mitunter besteht auch die Möglichkeit, durch Zusatzfedern eine Vorlast zu erzeugen – diese Federkraft sollte aber nicht mitgemessen werden.

7.6.2 Das Spektrum abklingender Teiltöne

Das **Spektrum** einer idealen, ungedämpften Saitenschwingung ist harmonisch, es kann ohne großen Aufwand mit der Fourier-Reihe dargestellt werden. Bei der **realen Saite** wirken aber gleich mehrere Dämpfungsmechanismen: Die Saite selbst strahlt Schall ab, in ihrem Innern wird Wärme erzeugt, und in den Lagern wird der Saitenschwingung Wirkleistung entzogen. Die Teiltonamplituden, die bei der Fourier-Reihe Konstante sind, werden zeitabhängig, die Saitenschwingung ist nicht mehr periodisch. Das Standard-Werkzeug für die Analyse nicht-periodischer Schwingungen ist das **Fourier-Integral** mit spezieller Fenstergewichtung. Bei der Auswahl der Analyseparameter trifft man allerdings auf einen klassischen Zielkonflikt, der nicht immer zur Zufriedenheit gelöst werden kann: Bei kurzer Fensterdauer verbreitert der Leakage-Effekt die Spektrallinien, bei langer Fensterdauer wird die Zeitauflösung zu schlecht. Wären alle Teiltöne regulär gespreizt (Kap. 1.3), könnte man noch einen akzeptablen Kompromiss finden, die allpassbedingte Erzeugung von Zusatztönen erfordert jedoch eine möglichst schmalbandige Analyse (vergl. Abb. 7.39).

Die Spektrallinie eines Dauertones, im Dichtespektrum als Dirac dargestellt, wird zum kontinuierlichen (unendlich breiten) Spektrum, sobald die Amplitude zeitvariant wird [6]. Für den exponentiellen Abklingvorgang muss die Dirac-Linie mit der Fourier-Transformierten der e -Funktion gefaltet werden, deren Parameter die **Zeitkonstante** τ ist:

$$u(t) = e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega_0 t);$$

$$\underline{U}(j\omega) = (j\omega + 1/\tau) / [(j\omega + 1/\tau)^2 + \omega_0^2]$$

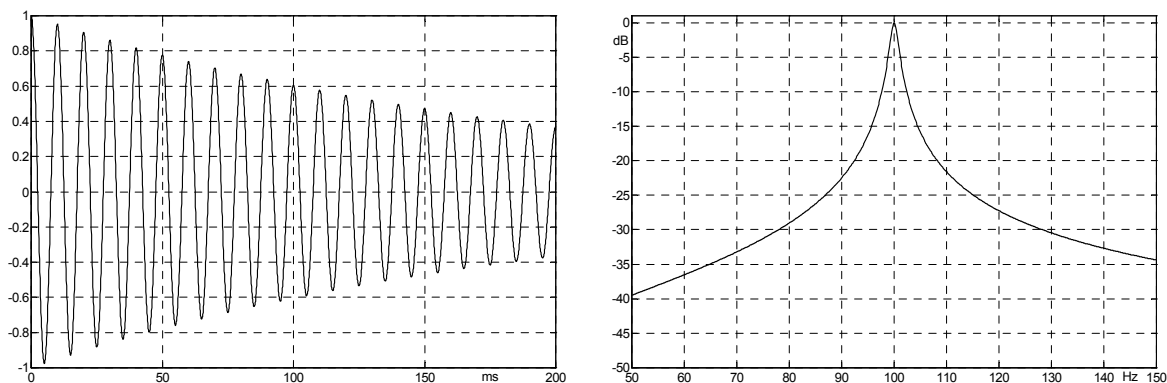


Abb. 7.57: Zeitfunktion und Spektrum eines exponentiell abklingenden Kosinus-Tones; $f = 100$ Hz, $\tau = 200$ ms.

Je schneller der Ton abklingt, d.h. je kleiner τ , desto breiter wird das Spektrum im relevanten Pegelbereich. In **Abb. 7.57** sind Zeitfunktion und Spektrum eines abklingenden 100-Hz-Tones dargestellt. Zugunsten einer guten Darstellung ist die Zeitkonstante mit 200 ms relativ kurz gewählt – bei Gitarrensaiten sind Werte bis über 5 s möglich. Die Aufweitung des Spektrums in **Abb. 7.57** darf nicht mit dem typischen DFT-Leakage verwechselt werden, sie ergibt sich alleine aus der zeitlichen Amplitudenabnahme. Wird aus der bei $t = 0$ beginnenden, unendlich dauernden Zeitfunktion ein DFT-**Frame** (Block, Rahmen) herausgeschnitten und in den Spektralbereich transformiert (Kurzzeit-Spektrum), bewirkt diese zeitliche Gewichtung eine zusätzliche Faltung im Frequenzbereich: Das ist das **Leakage**, ein zusätzliches Auseinanderfließen des Spektrums, das sich hauptsächlich im Bereich der Spitze bemerkbar macht. Je kürzer der DFT-Frame, desto stärker die spektrale Verbreiterung, wobei als weiterer Parameter die zeitliche Gewichtungsfunktion (Fenster-Funktion) zu berücksichtigen ist.

Anstatt eine Spektrallinie zweimal zu falten, ist es meistens einfacher, die DFT als Filteranalyse zu interpretieren. Übertragungsfunktion des Analysefilters ist die Fouriertransformierte der Fenster-Funktion. In **Abb. 7.58** sind das Spektrum eines abklingenden Zweitonsignal und der Filterfrequenzgang des Kaiser-Fensters* dargestellt; einmal für eine 4-k-DFT, daneben für eine 16-k-DFT. Man sieht deutlich, dass die 4-k-DFT nicht imstande sein wird, die nahe benachbarten Linien zu trennen, und auch eine 16-k-DFT kann kein perfektes Ergebnis liefern. Aus zwei Gründen: Die Fensterkeule ist immer noch relativ breit, und dann überlappen sich ja die Spektren der beiden abklingenden Töne. Je geringer deren Frequenzabstand und je schneller deren Abklingen, desto schwieriger die Analyse. Gut zu sehen ist in der Abbildung auch ein weiteres Problem speziell dieses Kaiser-Fensters: Die Nebenmaxima. Ihre Höhe kann durch Wahl eines größeren Fenster-Parameters (β) zwar reduziert werden, dadurch verbreitert sich aber die Fensterkeule noch mehr.

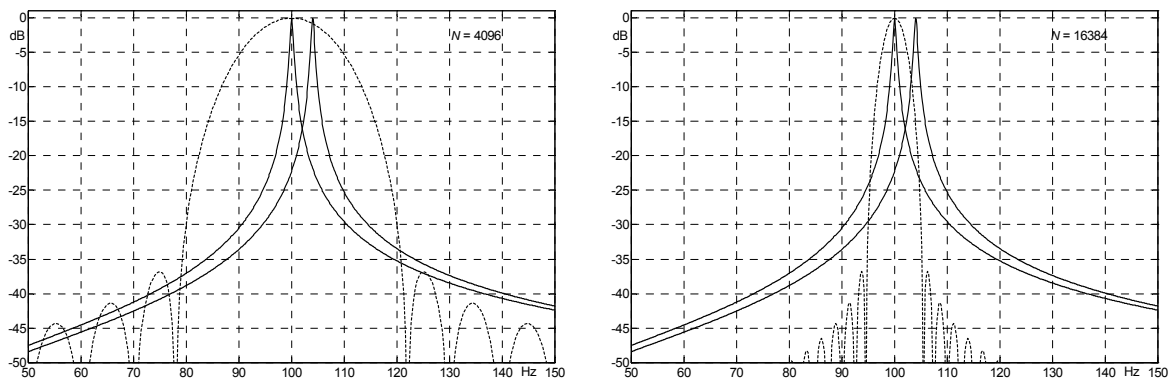


Abb. 7.58: Zweitonsignal (100 Hz, 104 Hz, $\tau = 0.5$ s), Kaiser-Fenster ($\beta = 5$), Abtastfrequenz 48 kHz.

Ein abklingender Teilton lässt sich durch vier Parameter beschreiben: Frequenz, Pegel, Phase und Zeitkonstante. Die **Phase** realer Gitarrentöne ist für den Klang von eher untergeordneter Bedeutung (vergl. Kap. 8.5), alle anderen drei Parameter sollten durch eine Spektralanalyse aber in guter Genauigkeit ermittelbar sein. Dass sie's doch nicht sind, liegt in der Regel nicht am verwendeten Analysator, sondern am Messprinzip.

Jede DFT weist spezielle **Pegelfehler** auf, die beim Hanning-Fenster durchaus 1,4 dB betragen können; dies ist bekannt und wird zumeist akzeptiert. Falls nicht: Es gibt ein Vielzahl an Alternativen, deren Pegelfehler kleiner als 1 dB ist. Bei Dauertönen! Denn bei allen anderen Signalen können wesentlich größere Pegelfehler entstehen – sonst würde man ja immer nur mit dem Flat-Top-Fenster arbeiten. Jedes Fenster hat spezifische Vor- und Nachteile, deren Kenntnis den Experten auszeichnet. Gut bewährt haben sich die Blackman-Harris-Fenster, sowie die Kaiser-Fenster, deren Parameter aber nicht einheitlich spezifiziert wird. Nicht alle Fenster haben einen derartigen **Parameter**. Sofern er existiert, kann mit ihm ein Kompromiss zwischen hoher Nebenmaxima-Dämpfung und kleiner Fenster-Bandbreite gesucht werden. Vergrößerung des Parameters vergrößert die Messdynamik, verschlechtert aber die spektrale Selektivität. Deshalb sollte der Parameter nur so groß gewählt werden, dass ca. 40 – 60 dB Dynamik erreicht werden.

Die folgenden **Tabelle** gibt einen kurzen Überblick über einige wichtige Fenster-Parameter, für weitergehende Details existiert Spezialliteratur.

* Parameter-Definition wie bei MATLAB üblich

Tabelle: Daten gebräuchlicher DFT-Fenster [aus M. Zollner: Signalverarbeitung, HS-Regensburg, 2010].

	<i>SLA</i>	<i>MLW</i>	Ripple	<i>BW</i>	<i>FM</i>	<i>PM</i>
	dB	Linien	dB	dB		
Rechteck	13.26	1.62	3.92	0	1.000	1.000
Dreieck	26.52	3.24	1.82	1.25	0.500	0.333
Exponential $\alpha = 1$	12.6	1.72	3.65	0.34	0.632	0.432
2	10.8	2.16	3.03	1.18	0.432	0.246
3	–	–	2.35	2.19	0.317	0.166
4	–	–	1.77	3.17	0.246	0.125
Hanning	31.47	3.37	1.42	1.76	0.500	0.375
Hamming	42.68	3.83	1.75	1.34	0.540	0.397
Rosenfeld	48.4	5.78	0.90	2.81	0.381	0.277
Gauss $\alpha = 2.50$	(40)	(5.9)	1.58	1.60	0.495	0.354
3.16	60	7.1	1.06	2.53	0.396	0.281
3.76	80	10.4	0.76	3.27	0.333	0.235
4.32	100	13.9	0.57	3.87	0.290	0.205
Blackman exact	68.24	5.87	1.15	2.29	0.427	0.308
" approx	58.11	5.64	1.10	2.37	0.420	0.305
Blackm.-H. 3/62	62.05	5.38	1.27	2.07	0.450	0.326
3/71	70.83	5.91	1.13	2.33	0.423	0.306
4/74	74.39	6.43	1.03	2.54	0.402	0.290
4/92	92.01	7.88	0.83	3.02	0.359	0.258
Nuttall 3/47	46.74	5.78	0.86	2.89	0.375	0.273
3/64	64.19	5.88	1.05	2.49	0.409	0.296
4/61	60.95	7.79	0.62	3.64	0.313	0.226
4/83	82.60	7.88	0.73	3.27	0.339	0.244
4/93	93.22	7.92	0.81	3.06	0.356	0.256
4/98	98.17	7.33	0.85	2.96	0.364	0.261
Kaiser-Bessel 1.74	40	3.84	1.63	1.49	0.533	0.385
2.60	60	5.45	1.16	2.26	0.431	0.313
3.42	80	7.03	0.91	2.81	0.378	0.272
4.22	100	8.60	0.75	3.25	0.340	0.245
Flat-Top 40	40	5.34	0.05	4.44	0.299	0.247
60	60	7.01	0.05	4.97	0.260	0.212
80	80	8.78	0.05	5.40	0.233	0.188
100	100	10.29	0.05	5.69	0.216	0.173
Dolph-Tsch. 2.4	40	3.80	1.78	1.55	0.537	0.412
3.4	60	5.26	1.29	2.07	0.450	0.326
4.4	80	6.68	1.03	2.61	0.395	0.285
5.4	100	8.06	0.88	3.04	0.356	0.256
Barcilon-T. 2.21	40	3.71	1.74	1.38	0.536	0.395
3.26	60	5.18	1.27	2.12	0.446	0.324
4.27	80	6.60	1.01	2.65	0.391	0.282
5.30	100	7.98	0.85	3.08	0.353	0.254

SLA = Nebenmaximumdämpfung (Sidelobe Attenuation)**MLW** = Hauptkeulenbreite (Mainlobe Width)**Ripple** = Pegelfehler**BW** = Leistungsbandbreite in dB**FM** = Fenstermittelwert**PM** = Leistungsmittelwert

Die Fenster-Parameter können entweder aus der zeitlichen Fensterfunktion $w[\mathcal{G}]$ oder aus der spektralen Fensterfunktion $W[\nu]$ berechnet werden. Die zeitlichen Fensterfunktionen sind immer **amplitudennormiert**, d.h. ihr Maximalwert ist 1. Der Zeitnullpunkt liegt bei allen symmetrischen Fenstern in der Fenstermitte, bei unsymmetrischen Fenstern am Anfang. Der Begriff **Polynomfenster** bezeichnet symmetrische Fenster, deren Zeitfunktion als Überlagerung von Kosinusschwingungen beschrieben werden kann:

$$w[\mathcal{G}] = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos[k2\pi\mathcal{G}] \quad -0.5 \leq \mathcal{G} < +0.5$$

Formeln für Polynomfenster
 \Downarrow

Fenstermittelwert FM :

$$FM = \frac{1}{N} \sum_{\mathcal{G}=1}^N w[\mathcal{G}] \quad FM = a_0$$

FM ist der lineare Mittelwert. $\text{Max}(w)/FM$ heißt in der englischen Literatur *coherent gain*.

Leistungsmittelwert PM :

$$PM = \frac{1}{N} \sum_{\mathcal{G}=1}^N w^2[\mathcal{G}] \quad PM = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$$

PM ist der Mittelwert über die Quadrate der Gewichtsfunktion

Effektive Bandbreite B_{eff} :

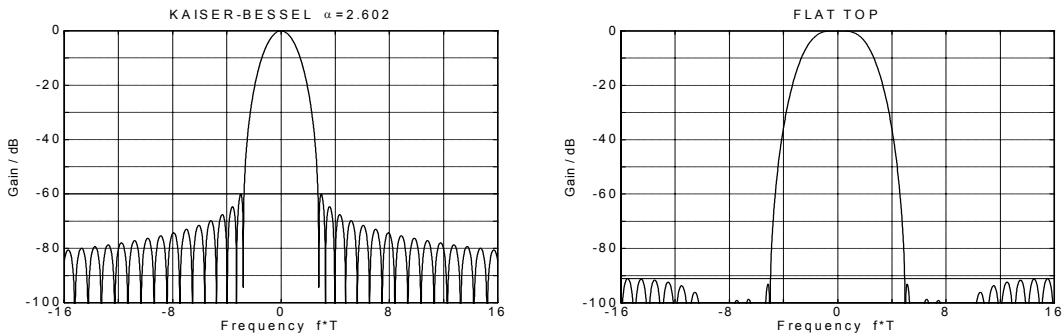
$$B_{eff} = \frac{\sum w^2}{\left(\sum w\right)^2} \cdot f_a = \frac{PM \cdot \Delta f}{FM^2} \quad B_{eff} = \left(1 + \frac{1}{2a_0^2} \sum_{k=1}^n a_k^2\right) \cdot \Delta f$$

Häufig wird B_{eff} auf die Linienbreite Δf bezogen: $BW_L = B_{eff} / \Delta f$; $BW_{dB} = 10 \lg(BW_L) \text{dB}$.

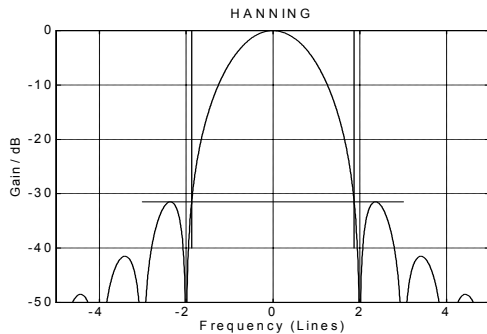
Effektive Dauer T_{eff} :

$$T_{eff} = \frac{\sum w^2 \cdot \Delta t}{\left(\text{Max}(w)\right)^2} = PM \cdot T \quad [\text{für } \text{Max}(w)=1] \quad T_{eff} = \frac{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2}{\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)^2} \cdot T$$

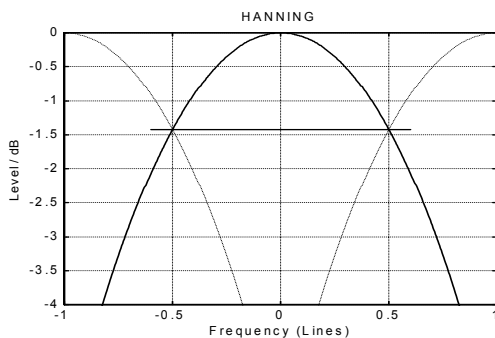
Häufig wird T_{eff} auf die Fensterdauer T bezogen: $T\% = T_{eff} \cdot 100\% / T$.

Nebenmaximumdämpfung (Sidelobe attenuation) SLA :

Bei dem dargestellten Kaiser-Bessel-Fenster ist $SLA = 60\text{dB}$; beim Flat-Top-Fenster 91 dB.

Hauptkeulenbreite (Mainlobe width) MLW :

MLW wird als Vielfaches des Linienabstandes angegeben, im Beispiel $MLW = 2 \cdot 1.87 = 3.74$

Pegelfehler ΔL (Ripple, Scallop loss):

Der Pegelfehler wird beim halben Linienabstand bestimmt, im Beispiel $\Delta L = 1,4\text{ dB}$

Weiterführende Literatur:

- | | |
|--------------|---|
| Brigham E.: | FFT - Schnelle Fourier Transformation, Oldenbourg 1985 |
| Gade S.: | Use of weighting functions in DFT-Analysis, B&K T. Rev. 387 |
| Harris F.: | Use of windows for harmonic analysis, Proc. IEEE, Vol.66, 1/1978 ^Δ |
| Papoulis A.: | The Fourier Integral and its Applications, McGraw-Hill, 1962 |
| Zollner M.: | Signalverarbeitung, Hochschule Regensburg, 2010 |
| Zollner M.: | Frequenzanalyse, Hochschule Regensburg, 2010. |

^Δ Diese an sich sehr gute Veröffentlichung enthält einige Schreib- und Zeichenfehler!

Die Frequenz eines Teiltones vermutet man, so man der DFT vertraut, bei lokalen Maxima des Betragsspektrums. Dass dies nicht zwangsläufig der Fall sein muss, verdeutlicht **Abb. 7.59**: Das Spektrum dieses abklingenden Zweitonsignals enthält tatsächlich zwei Maxima, die aber nicht exakt bei den beiden Teilton-Frequenzen liegen. Und dass bei $t = 0$ beide Teiltöne gleichen Pegel haben, wird auch nicht ersichtlich. In der Theorie stimmt's natürlich schon: Weil der höherfrequente Teilton schneller abklingt, ist seine Energie im DFT-Frame geringer. Das lässt sich ohne Kenntnis des Signals dem Bild aber nicht entnehmen. Und es dürfte die Regel sein, dass *unbekannte* Signale analysiert werden.

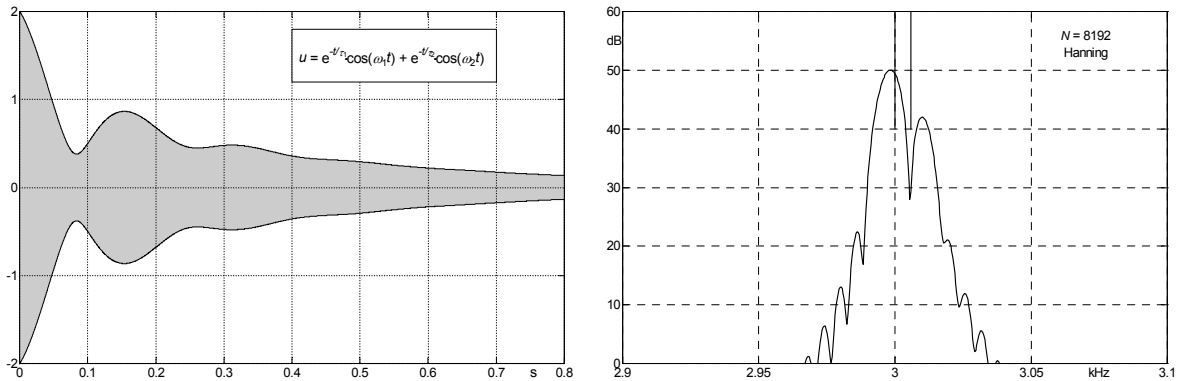


Abb. 7.59: Abklingendes Zweitonsignal: $f_1 = 3000$ Hz, $\tau_1 = 0.4$ s, $f_2 = 3006$ Hz, $\tau_2 = 0.1$ s; $u = u_1 + u_2$. Das linke Bild zeigt die zeitliche Hüllkurve, das rechte das Pegelspektrum. Die Frequenzen der beiden Teiltöne sind im rechten Bild durch zwei senkrechte Striche markiert.

Die Abklingzeitkonstante kann *einem* Spektrum auch nicht entnommen werden, wiewohl sie darin irgendwie enthalten sein muss – aber eben nicht offensichtlich. Deshalb erstellt man ein spektrales **Array**, in das der Pegel als Funktion von Frequenz und Zeit eingetragen wird. Das Fenster wird hierzu (ggf. mit Überlappung) längs der Zeitachse verschoben, die Verschiebung ergibt den Abszissenwert für die Darstellung des Pegelabfalls. Hierbei tritt eine Schwierigkeit auf: Für einen *Zeitpunkt* kann kein sinnvolles Spektrum angegeben werden (das Spektrum des Diracs ist weiß), nur über einen *Zeitbereich*, nämlich den Frame, ist Spektralanalyse sinnvoll. Wenn man also das Abklingen eines Teiltonpegels aus der DFT ermittelt, muss man wissen, ob die Zeitachse dem Beginn, der Mitte, oder dem Ende des Frames zugeordnet ist. Im Folgenden ist immer die Fenstermitte der Bezug. Mit der Konsequenz, dass der Pegelabfall nicht ab $t = 0$ dargestellt werden kann. Bei 48 kHz Abtastfrequenz ergeben 8192 Abtastpunkte nämlich schon eine Fensterdauer von 170 ms, das erste Spektrum muss folglich $t = 85$ ms zugeordnet werden. Dies offenbart die grundsätzliche Problematik jeder Kurzzeit-DFT: Für eine gute Zeitauflösung muss der Frame kurz sein (z.B. $N = 256$), dann ist aber die spektrale Auflösung schlecht. Für gute spektrale Auflösung muss der Frame lang sein (z.B. 32-k-DFT), dann ist aber die zeitliche Auflösung schlecht.

Um nicht zu lange bei synthetischen Signalen zu verweilen, sollen nun Aufnahmen einer **realen Gitarrensaite** ($\varnothing = 0,7$ mm, $M = 68$ cm, $f = 152$ Hz) analysiert werden. Diese war auf einen Steintisch gespannt, als Stege dienten Stahlzylinder ($\varnothing = 3$ mm), der Knickwinkel betrug 17° . Die Querschwingung wurde 9 mm von einem Steg entfernt mit einem Laser-Vibrometer gemessen, knapp neben dem anderen Steg wurde die Saite impulsartig angeschlagen. Saite, Anschlagrichtung und Laserstrahl lagen in derselben Ebene. Das Lasersignal wurde mit 48 kHz abgetastet und aufgezeichnet, die weiteren Auswertungen erfolgten mit MATLAB. Die tiefen Teiltöne zeigen hierbei reguläres Abklingen, ab ca. 3 kHz beginnen Irregularitäten.

Abb. 7.60 zeigt links oben den Ausschnitt aus einem Pegelspektrum, und daneben den aus dem DFT-Array ermittelten Abfall des 3633-Hz-Teiltones. Allein aus diesem Spektrum wäre nicht zwingend zu erkennen, dass dieser Ton irregulär abklingt, die Kurzzeit-DFT zeigt hingegen heftige Schwabungen. Ändert man jedoch die DFT-Parameter, wobei hier nur die Punktezahl verändert werden soll, entstehen ganz andere Abklingkurven. Die wieder anders aussehen, wenn man zusätzlich auch noch den Fenstertyp variiert. Mit $N = 8192$ sieht man bei 3633 Hz nicht nur einen Teilton, sondern zwei – die zugehörigen Pegel klingen aber immer noch nicht linear ab, sondern schwebend, also müssen noch mehr Teiltöne vorhanden sein. Die sich jedoch selbst mit $N = 32768$ nicht trennen lassen. Hierbei beträgt die Fensterdauer schon 0.68 s, und da bleibt für ein zeitliches Verschieben innerhalb des 1 s dauernden Signals nicht mehr viel Platz. Dass die Minima nicht genau reproduziert werden, darf übrigens nicht stören: Sie entstehen als Interferenz, die sehr sensibel auf Dämpfungsunterschiede reagiert. Und es ist ja gerade ein Charakteristikum eines Fensters, Teiltöne zu bedämpfen.

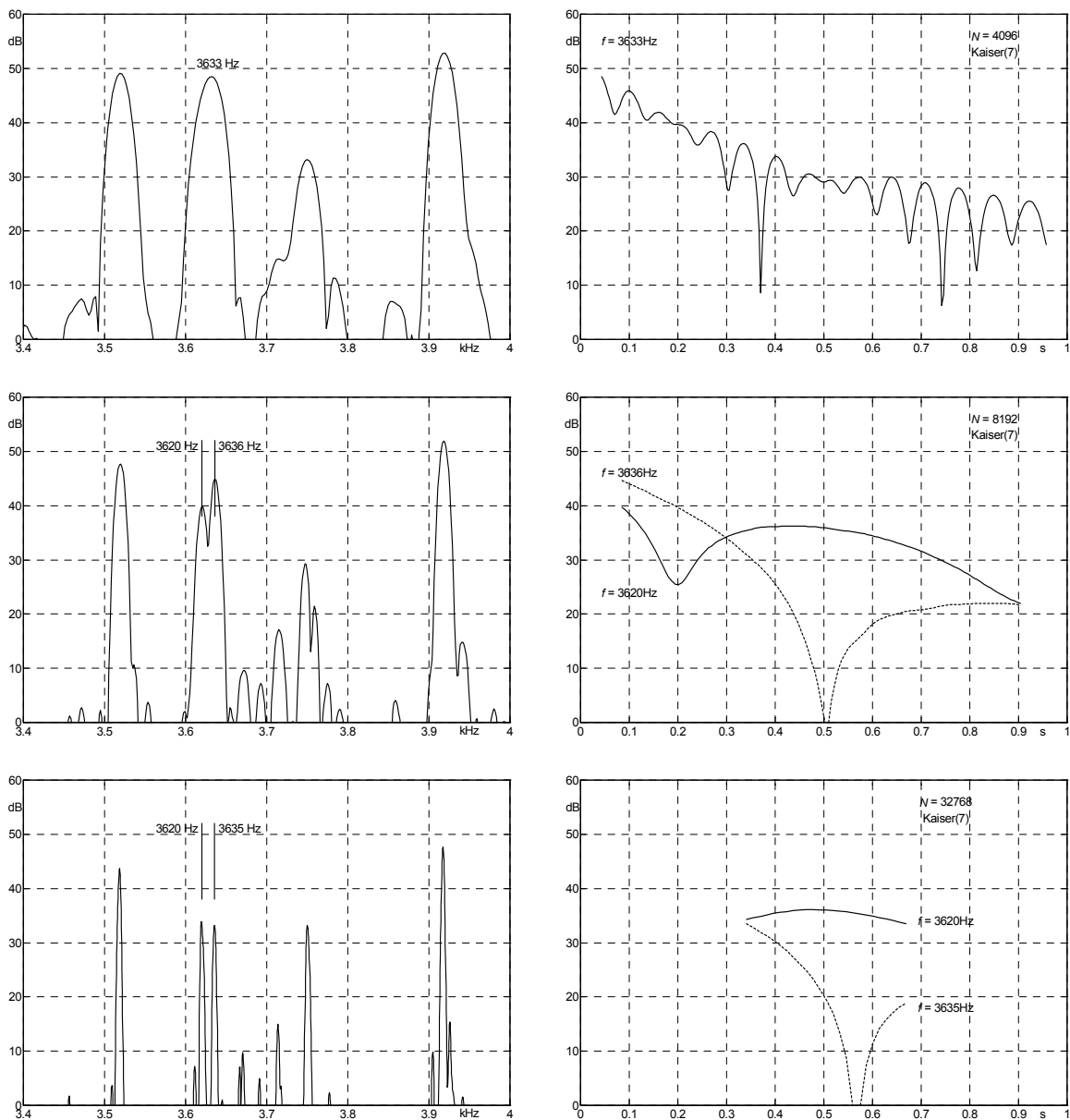


Abb. 7.60: Spektrum (links). Pegelabfall (rechts) einzelner DFT-Linien. Kaiser-Fenster (MATLAB).

Welches Spektrum ist nun das richtige? Jedes natürlich, es gibt unendlich viele (und richtige) Kurzzeitspektren. Welches ist zweckmäßig? Diese Frage ist schon sehr viel schwerer zu beantworten. Gegenfrage: Zu welchem Zweck? Ursachen- oder Wirkungsforschung, Mechanik oder Psychoakustik? Zur Bestimmung von Eigenfrequenzen wird meist eine DFT mit hoher Punktezahl gewählt, für den Klangeindruck ist jedoch die genaue Frequenz eines Teiltönes nur indirekt von Bedeutung: Zwei Töne in geringem Frequenzabstand werden nicht als verstimmt, sondern als schweben gehört, d.h. als temporaler, und nicht als spektraler Effekt. Deshalb wird man für Klangforschungen eher auf die zeitliche Struktur schauen, und kurze DFT-Längen bevorzugen. Wohl wissend, dass sich die **Psychoakustik** mit derart komplexen Schallen immer noch schwer tut. Auf dem Markt der Psychoakustik-Analysatoren konkurrieren nach wie vor Geräte mit sehr unterschiedlichen Analysefiltern miteinander, werden Gammafilter als scheinbar äquivalent neben terzähnliche Frequenzgruppenfilter gestellt, werden spezifische Lautheiten über 6-polige Normterzfilter oder über echte Frequenzgruppenfilter berechnet, wird der Filterphase generell keine Bedeutung geschenkt. Die grobe Richtung ist damit bestimmbar, subtile Klangunterschiede nicht. Das Innenohr ist ein zeitvariantes, nicht-lineares System, dessen Übertragungscharakteristik (d.h. Betrags- und Phasengang) vom Schallsignal beeinflusst wird. Demgegenüber verwenden handelsübliche Analysatoren zeitinvariante Filter, und rechnen, wenn überhaupt, die nichtlineare Auffächerung der oberen Verdeckungsflanke nachträglich als Korrektur in den Signalfluss. Dies funktioniert bei relativ einfachen Signalen, liefert bei komplexen Klängen aber nur mehr Orientierungswerte.

Da es offensichtlich nicht möglich ist, alle Teiltöne eines Gitarrentons messtechnisch zu ermitteln, ist es nicht empfehlenswert, mit immer höherer DFT-Punktezahl eine immer bessere Frequenzauflösung erreichen zu wollen. *Stattdessen könnte man überlegen, ob es überhaupt sinnvoll ist, ein Signal, das modellgemäß aus abklingenden inharmonischen Teiltönen besteht, in eine Reihe nichtabklingender harmonischer Teiltöne entwickeln zu wollen!* Denn genau das macht der DFT-Algorithmus: Das Suchtonverfahren des Fourier-Integrals sucht Dauertöne, und bestimmt deren Amplitude, Frequenz und Phase – von Abklingzeitkonstante ist da nicht die Rede. Bei kausalen Zeitfunktionen, deren Fourier-Transformierte auf der $j\omega$ -Achse keine Pole enthält (Gitarrentöne gehören dazu) kann alternativ zur Fourier-Transformierten die Laplace-Transformierte angegeben werden, und damit besteht theoretisch die Möglichkeit der Residuensuche, und daraus abgeleitet die Beschreibung durch Pole der komplexen p -Ebene. MATLAB bietet (u.a.) mit dem **Prony-Algorithmus** eine Möglichkeit, aus einem Zeitsignal direkt die Pole und Nullstellen eines ARMA-Modells (IIR/FIR-Filter) zu bestimmen, und somit Eigenfrequenzen und Dämpfungsfaktoren einzelner Teiltöne zu ermitteln. Um diesen Algorithmus nicht allzu sehr zu strapazieren, erscheint es sinnvoll, das Signal zuerst durch ein Bandpassfilter zu schicken, damit nur wenige (schwer trennbare) Teiltöne übrigbleiben. Es darf jedoch nicht erwartet werden, dass hiermit nun alle Signale wunschgemäß zu analysieren sind: Jedes Verfahren hat systemimmanente Artefakte, und produziert mit zunehmender Signalkomplexität zunehmend komplexere Artefakte*.

Aber um nicht zu sehr im Nebel des Spekulativen zu versinken, zwei Empfehlungen: Zur Analyse der niederfrequenten Teiltöne ist die DFT gut geeignet, sie kann auf den Basssaiten bis ca. 1 kHz, und auf den Diskantsaiten bis ca. 2 kHz eingesetzt werden. Im höheren Frequenzbereich kann es zweckmäßig sein, neben der DFT auch eine Terzanalyse durchzuführen, die für Zeiteffekte besser anpassbar ist. Unzweckmäßig ist die Lautheitsanalyse des Tonabnehmersignals: Es erreicht in dieser Form nicht das Gehör!

* Diese sehr pauschale Aussage lässt sogar Raum für die philosophisch anmutende Frage, ob denn nun ein Rechteck sehr komplex sei, weil bekanntermaßen aus unendlich vielen Sinustönen zusammengesetzt, oder ob nicht doch der Sinuston der kompliziertere ist, weil aus unendlich vielen Rechtecken summierbar.

Die Bandbreiten der **Terzfilter** (23%) entsprechen im Bereich $f > 500$ Hz näherungsweise den Bandbreiten der Gehörfilter (ca. 20%), das Zusammenfassen benachbarter Teiltöne zu einem Analysekanal ruht damit auf ähnlichen Grundlagen. Und immerhin teilt ja das Terzfilter mit dem Frequenzgruppenfilter die Gemeinsamkeit, Phasengängen eine sehr niedrige Priorität zuzuweisen.

Eine übersichtliche, wenngleich etwas willkürliche Darstellung liefert das **Volagramm***: Das Abklingen einzelner Teiltöne (oder eigentlich: DFT-Linien) wird hier als Differenzspektrum dargestellt: $L(f, t + \Delta t) - L(f, t)$. Einen Eindruck vermittelt **Abb. 7.61**: Aus 4 DFT-Spektren, für 0 / 170 / 340 / 510 ms ermittelt, wurden Pegeldifferenzen errechnet und durch Linienzüge dargestellt. Das linke Bild zeigt ein ziemlich reguläres Teiltonabklingen, mit fortschreitender Zeit fächert der Linienzug nach unten auf, weil höherfrequente Teiltöne schneller abklingen als tieffrequente. Im rechten Bild sind stärkere Irregularitäten zu erkennen, die ihre Ursache u.a. in fluktuierenden Teiltonhüllkurven haben. Die Darstellung ist nicht eindeutig, da sowohl die Fensterart als auch die Zeitabstände willkürlich gewählt sind, sie bietet aber eine schnelle visuelle Orientierung über kritische Frequenzbereiche.

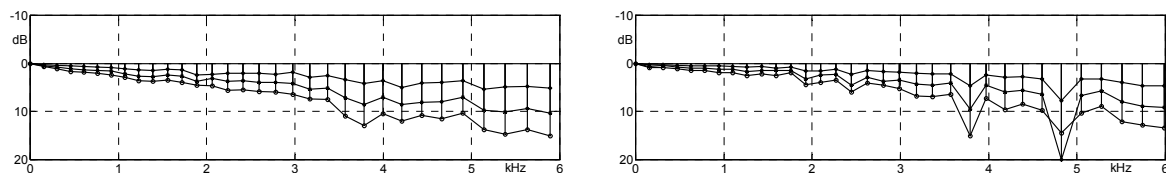


Abb. 7.61: Volagramme: Saite auf dem Steintisch gelagert; Enden geklemmt (links), gestützt (rechts). 0,7-mm-Saite, $f_G = 150$ Hz, $\Delta t = 170 / 340 / 510$ ms, $N = 4096$, Matlab-Kaiserfester ($\beta = 12$). Als Ordinate ist die Dämpfung dargestellt, mit fortschreitender Zeit fächert der Linienzug nach unten auf.

7.6.3 Die Abklingzeit T_{30}

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Dämpfung eines Resonanzkreises quantitativ zu beschreiben: Dämpfungsgrad, Zeitkonstante, Verlustfaktor, logarithmisches Dekrement, Abklingmaß, Güte. Die Schwingung eines durch Stokes'sche Reibung bedämpften Feder-Masse-Systems klingt nach Impulsanregung exponentiell ab:

$$v(t) = e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega_0 t); \quad \tau = \text{Zeitkonstante}$$

Die in dieser Formel verwendete Zeitkonstante heißt mit vollem Namen Amplituden-Zeitkonstante, weil sie die Abnahme der Amplitude beschreibt. Auch die Leistung nimmt bei dieser Schwingung exponentiell ab, da aber Leistungen quadratisch von Amplituden abhängen, ergibt sich für die Leistungsabnahme eine andere Zeitkonstante – diese sog. Leistungs-Zeitkonstante ist halb so groß wie die Amplituden-Zeitkonstante. Beispielsweise ist die bei normgemäßen Schallmessungen in der Mittelungsart "Fast" verwendete 100-ms-Zeitkonstante eine Leistungs-Zeitkonstante; die zugehörige Amplituden-Zeitkonstante beträgt 200 ms. Eine Zeitkonstante spezifiziert die Zeitspanne, während der die damit charakterisierte Größe auf $1/e = 0.368$ abgefallen ist. Alternativ kann man aber auch den Abfall auf andere Kennwerte angeben, wie dies z.B. die Raumakustik mit der **Nachhallzeit** T_N praktiziert. Während T_N fällt der Signalpegel um 60 dB, die Amplitude also auf $1/1000$. Weil ein derart großer Abfall für musikalische Töne praxisfern ist, hat Fleischer [9] 30 dB als **Abklingzeit** T_{30} vorgeschlagen.

* volare = schwinden, volatil = flüchtig, abklingend (lat.); graphein = zeichnen (gr.).

Die Abklingzeit darf nun aber nicht so verstanden werden, dass die Saite angeschlagen wird, und dann wartet man, bis der Pegel um 30 dB abgenommen hat. Vielmehr ist im $L(t)$ -Diagramm eine **Glättungsgerade** zu bilden, und deren Steigung ergibt die Abklingzeit. In **Abb. 7.62** ist im ersten Bild ein perfekter linearer Pegelabfall dargestellt. Wenn die Amplitude exponentiell über der Zeit abfällt, nimmt der Pegel (die logarithmierte Amplitude) linear über der Zeit ab. Das **Abklingmaß** (Decay-Rate) als negative Steigung der Kurve beträgt in diesem Beispiel 8.7 dB/s, die Zeitkonstante ist 1 s, die Abklingzeit 3.45 s.

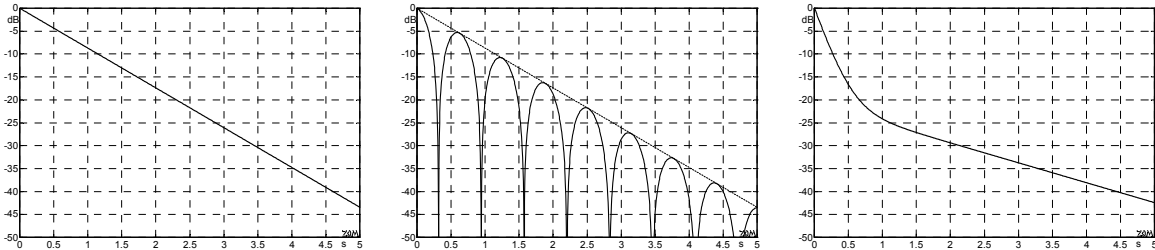


Abb. 7.62: Verschiedene Abklingvorgänge.

Im mittleren Bild ist der Pegelabfall einer Schwebung dargestellt: Nach 0.31 s hat der Pegel das erste Mal (gegenüber dem Anfangswert) um 30 dB abgenommen. Doch das ist nicht die Abklingzeit, die beträgt, wie im ersten Beispiel, 3.45 s, errechnet aus der gestrichelt eingezeichneten Hüllkurve. Derartige **Schwebungen** entstehen, wenn zwei Teiltöne gemeinsam abklingen, und beide denselben Startwert, dieselbe Dämpfung, aber leicht unterschiedliche Frequenz haben. In diesem Beispiel ist es nicht schwer, über die Kurvenmaxima eine Hüllkurve zu legen, und deren Steigung zu bestimmen. Schwieriger wird die Aufgabe, wenn die Schwebungsperiode sehr lang ist, wenn z.B. das erste Minimum erst nach 5 s erreicht wird. Die Pegelwerte der folgenden Maxima lassen sich dann u.U. nicht mehr ermitteln, weil das Signal schon zu klein geworden ist (und in den immer vorhandenen Störungen untergeht).

Noch problematischer wird die Abklinganalyse, wenn zwei Teilschwingungen mit sehr unterschiedlichen Zeitkonstanten abklingen (rechtes Bild). Man könnte T_{30} aus der Anfangssteigung ermitteln (wie das z.B. in der Raumakustik bei der Early-Decay-Time gemacht wird), oder aus der Endsteigung, oder man nimmt doch den Zeitpunkt, bei dem L durch -30 dB geht. Was bei einer Kombination von Schwebung und unterschiedlichen Zeitkonstanten aber leicht einen unbrauchbaren T_{30} -Wert ergeben kann. In den meisten Fällen ist die Abklingzeit eine gut brauchbare Größe zur Beschreibung des Abklingvorgangs bzw. der Dämpfung, in einigen Sonderfällen ist sie jedoch unzweckmäßig. Insbesondere bei Programmen, die automatisch T_{30} berechnen, ist deshalb Vorsicht anzuraten.