Anhang zu Kap. 6: Piezoelektrische Zustandsgleichungen

Die Beschreibung piezoelektrischer Energiewandlung verwendet eingeführte **Formelzeichen**, die in anderem Zusammenhang häufig andere Bedeutung haben. Beispielsweise steht *S* oft für die Fläche (engl. Surface), beim Piezokristall bezeichnet *S* hingegen die relative Verformung; der Buchstabe *E* wird gerne für die Feldstärke verwendet, aber auch für die Energie oder für den Elastizitätsmodul; *d* steht für Durchmesser, oder für Dicke, oder für den Piezomodul. Die folgende Tabelle listet die zur Beschreibung piezoelektrischer Wandler nötigen Formelzeichen auf. Um Verwechslungen zu vermeiden, ist die Definition einiger Größen auf dieses spezielle Kapitel beschränkt.

Symbol	Einheit	Bezeichnung		Symbol	Einheit	Bezeichnung
A	m^2	Fläche		L	H	Induktivität
C	F	Kapazität		m	kg	Masse
d	m / V	Piezomodul		Q	As	Elektrische Ladung
D	As / m^2	Dielektrische Verschiebung		R	Ω	Elektrischer Widerstand
e	N / Vm	Piezo-Kraftkonstante		s^E, s^D	m^2 / N	Elastizitätskoeffizient♣
E^E, E^D	N / m^2	Elastizitätsmodul♣		S	1	Relative Verformung
E	V / m	Elektrische Feldstärke		t	s	Zeit
F	N	Kraft		T	N / m^2	Mechanische Spannung
g	Vm / N	Piezo-Spannungskonstante		U	V	Elektrische Spannung
h	V/m	-		W	Ws	Energie
k	1	Kopplungsfaktor		α	N / V	Wandlerkonstante
l	m	Länge		ε^S , ε^T	F / m	Dielektrizitätskonstante♣

Die drei **Raumkoordinaten** (x, y, z) werden bei der Indizierung durch die Ziffern 1, 2, 3 ersetzt, wobei entsprechend üblicher Regel beim **Dickenschwinger** die Flächennormale in die mit 3 indizierte Richtung weist (**Abb. 6A.1**). Der Dickenschwinger ist der bei Tonabnehmern häufig anzutreffende Wandlertyp, nur er wird im Folgenden beschrieben. Die Dicke, hier mit *l* bezeichnet, beträgt typischerweise z.B. 0,2 … 1 mm, die Fläche A = 0,1 … 1 cm^2. Außer dem Dickenschwinger gibt es noch Biege-, Planar- und Scherschwinger, sowie weitere Wandlertypen. Der Dickenschwinger wird manchmal auch Längsschwinger oder auch Dickenschwinger mit Längseffekt genannt, die Begriffe sind nicht einheitlich.

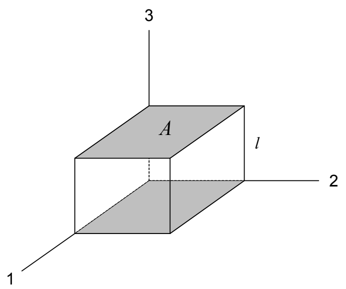


Abb. 6A.1: Piezokristall mit Richtungsdefinition. Ober- und Unterseite sind metallisiert und haben jeweils die Fläche *A*; zwischen diesen beiden Flächen entsteht die elektrische Feldstärke. Die Höhe (Länge bzw. Dicke) des Kristalls ist *l*. Beim hier betrachteten Dickenschwinger erfolgt die Bewegung (und Kraft) in vertikaler, mit 3 indizierter Richtung. Die elektrischen Felder sind hierzu parallel.

♣ Die hochgestellten Buchstaben kennzeichnen spezielle Lastzustände, siehe später.

Der in Abb. 6A.1 dargestellte Piezokristall wird in vertikaler Richtung durch die Kraft F_3 belastet, es entsteht eine vertikale mechanische Spannung $T_3 = F_3 / A$. Hierbei handelt es sich aber um den **1. Sonderfall**, der speziell gekennzeichnet werden muss: Es soll *nur* eine mechanische Belastung vorliegen, ohne elektrische Belastung, deshalb muss die elektrische Spannung durch Kurzschließen der Elektroden (der metallisierten Anschlussflächen) zu null gesetzt werden. Weil durch diesen **Kurzschluss** auch die elektrische Feldstärke $E = 0$ wird, kennzeichnet man diesen speziellen Zustand mit einem hochgestellten E, das aber nicht als mathematische Potenz verstanden werden darf. Im elektrisch kurzgeschlossenen Zustand reagiert der Piezokristall so, als wäre der Piezoeffekt nicht vorhanden; d.h. bei statischer Belastung wirkt der Kristall nur als Feder:

$$S_3 = \Delta l / l = T_3 / E_{33}^E = T_3 \cdot s_{33}^E ; \quad T_3 = F_3 / A \qquad \text{Hookesches Gesetz}$$

In dieser Gleichung ist S_3 die relative Längenänderung, die in der Mechanik gerne ε genannt wird. Weil ε aber auch das Formelzeichen für die (hier benötigte) Dielektrizitätskonstante ist, nennt die Elektromechanik die relative Längenänderung S; und da sie in vertikaler, mit 3 indizierter Richtung erfolgt, S_3. Die in vertikaler Richtung auftretende mechanische Normalspannung ist T_3, in der Mechanik sonst σ genannt. E_{33}^E ist der Elastizitätsmodul ohne Piezoeffekt, d.h. für $E = 0$. Die Doppelindizierung (33) ist bei allgemeiner Betrachtung erforderlich, weil elektrische Vektoren (erste Ziffer) und mechanische Vektoren (zweite Ziffer) in unterschiedlichen Richtungen auftreten können; bei den hier vorliegenden Betrachtungen erfolgt aber eine Beschränkung auf die (im Bild) vertikale Richtung 3. Deshalb könnte die Indizierung eigentlich unterbleiben – sie wird aber trotzdem angewandt, um Konformität zur Literatur zu erreichen. Das hochgestellte E ist keine mathematische Potenz, sondern ein Hinweis auf die Randbedingung der elektrischen Feldstärke: $E = 0$. Weil das Formelzeichen E des Elastizitätsmoduls leicht mit der Feldstärke (die auch E genannt wird) verwechselt werden kann, wird anstelle des Elastizitätsmoduls in der Regel dessen Kehrwert s mit gleicher Indizierung verwendet. s_{33}^E ist hier also keine Steifigkeit, sondern der Elastizitätskoeffizient in Richtung 3 für null gesetzte Feldstärke. Diese Nomenklatur ist zwar gewöhnungsbedürftig, findet sich aber auch in Datenblättern (z.B. Siemens Piezokeramik).

Zusammengefasst: Setzt man den Piezoeffekt durch elektrischen Kurzschluss außer Kraft, erhält man für statische mechanische Belastung in Richtung 3 einen **federnden Kristall** mit dem Elastizitätskoeffizient s_{33}^E, dessen (rein mechanisches) Verhalten durch das Hookesche Gesetz beschrieben wird.

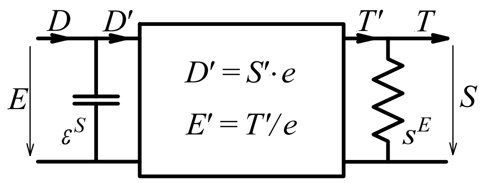


Abb. 6A.2: Der Piezokristall bei statischer Belastung. Im Gegensatz zu Kap. 6.1 sind hier flächen- bzw. längenspezifische Größen angegeben. Technische Vierpol-Pfeilrichtung, $E = E'$, $S = S'$.

Nun muss der Tatsache Rechnung getragen werden, dass die elektrische Seite ja nicht immer kurzgeschlossen sein wird. Für den jetzt betrachteten **2. Sonderfall** einer rein elektrischen Belastung wird die Beteiligung der mechanischen Seite durch die Bedingung $S = 0$ unterbunden. Dieser mechanische Kurzschluss, der auch "festgebremster Zustand" genannt wird, erfordert auf der mechanischen Seite **Formstarre**: Die relative Längenänderung (Dickenänderung) muss null sein. In Gedanken lässt sich dies mit einem unendlich steifen Kristall erreichen.

Es ist üblich, diese mechanische Unverformbarkeit (S = 0) bei der Dielektrizitätskonstante ε durch ein hochgestelltes S zu kennzeichnen:

$$D_3 = Q/A = \varepsilon_{33}^S \cdot E_3 = \varepsilon_{33}^S \cdot U/l = C_K \cdot U/A \qquad \text{Kondensatorgleichung}$$

Zusammengefasst: Setzt man den Piezoeffekt durch mechanischen Kurzschluss außer Kraft, erhält man für statische elektrische Belastung in Richtung 3 eine **Kapazität** mit der Dielektrizitätskonstante ε_{33}^S, deren (rein elektrisches) Verhalten durch die Kondensatorgleichung beschrieben wird.

Im dritten und letzten Schritt werden nun die Sonderbedingungen der rein mechanischen bzw. rein elektrischen Belastung fallengelassen; jetzt entsteht **der allgemeine Betrieb** durch Überlagerung der beiden Sonderfälle. Der *ideale* piezoelektrische Wandlungsprozess (in **Abb. 6A.2** als Viereck dargestellt) verknüpft elektrische und mechanische Größen:

$$D' = S' \cdot e_{33} \qquad E' = T'/e_{33} \qquad \text{differentielle Wandlergleichungen}$$

Mit den in Abb. 6A.2 definierten Bezugspfeilen lauten die beiden Knotenbedingungen:

$$T' = T + T_s \qquad D' = D - D_\varepsilon \qquad \text{Knotengleichungen}$$

Die Zweipolgleichungen der Speicherelemente verknüpfen Fluss- und Potentialgröße:

$$T_s = S/s_{33}^E \qquad D_\varepsilon = E \cdot \varepsilon_{33}^S \qquad \text{Zweipolgleichungen}$$

Hieraus lässt sich das Gleichungssystem für den allgemeinen Betriebsfall ableiten:

$$\begin{aligned} D &= D_\varepsilon + D' = E \cdot \varepsilon_{33}^S + S \cdot e_{33} \\ T &= T' - T_s = E \cdot e_{33} - S/s_{33}^E \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} D \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{33}^S & e_{33} \\ e_{33} & -1/s_{33}^E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}$$

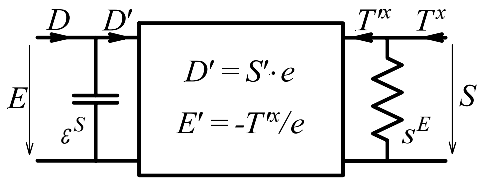
Die rechts angegebene Matrix bildet die beiden Potentialgrößen (E, S) auf die beiden Flussgrößen (D, T) ab. Sie kann als Leitwertmatrix interpretiert, und auf die Kettenmatrix umgeformt werden, wobei auch gleich neue Piezokoeffizienten (d, e, g, h) definiert werden:

$$\begin{aligned} E &= S/(e_{33} \cdot s_{33}^E) + T/e_{33} \\ D &= S \cdot \left(e_{33} + \varepsilon_{33}^S/(e_{33} \cdot s_{33}^E)\right) + T \cdot \varepsilon_{33}^S/e_{33} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d & 1/e \\ 1/g & 1/h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$$

$$d = e_{33} \cdot s_{33}^E; \qquad e = e_{33}; \qquad 1/g = e_{33} + \varepsilon_{33}^S/(e_{33} \cdot s_{33}^E); \qquad h = e_{33}/\varepsilon_{33}^S;$$

Die Kettenmatrix **A** verknüpft die beiden Vierpol-Eingangsgrößen (E, D) mit den beiden Ausgangsgrößen (S, T). Ihre Determinante $[\det(\mathbf{A}) = 1/dh - 1/ge = -1]$ ist negativ, weil hierbei eine gyratorische Abbildung vorliegt: Der ideale Wandler bildet Potentialgrößen (E', S') auf Flussgrößen (D', T') ab [3]. Die hierbei spezifizierten Vorzeichen sind in Übereinstimmung mit der Vierpoltheorie, aber im Widerspruch zu den üblicherweise in Datenblättern angegebenen Piezo-Parametern, die auf einer alten IEEE-Empfehlung beruhen.

Bei der in Datenblättern üblichen **Vorzeichendefinition** ergibt sich die Determinante der Kettenmatrix nicht gyratorspezifisch zu –1, sondern zu +1. Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, bei der Kettenschaltung dreier Vierpole die Vorzeichen zu invertieren. Gut interpretierbar ist der Übergang von der technischen Zählpfeilrichtung (Kettenpfeile) zur symmetrischen Zählpfeilrichtung. Dies entspricht einfach einem Umdrehen der Kraftrichtung, deren Definition ja generell ein besonderes Augenmerk erfordert. Mit dem Umdrehen der Kraftrichtung ändert sich auch die Bezugsrichtung der flächenspezifischen Normalspannung T, deren umgedrehte Variante im Folgenden T^x heißt (Abb. 6A.3).



$$\begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d & -1/e \\ 1/g & -1/h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T^x \end{pmatrix}$$

Abb. 6A.3: Der Piezokristall bei statischer Belastung. Ausgangs-Flusspfeile gegenüber Abb. 6A.2 umgedreht.

Das in **Abb. 6A.3** dargestellte Vierpolersatzschaltbild verwendet die symmetrische Zählpfeilrichtung (die in der Vierpoltheorie bei der **X**-, **Y**-, **H**- und **G**-Matrix üblich ist) zur Definition der Kettenmatrix. Unüblich, aber ein Weg, um Kompatibilität zu Datenblattkonventionen zu bekommen. Die Abbildungen lauten im Einzelnen:

$$\begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon_{33}^S & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E' \\ D' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/e \\ e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S' \\ T'^x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} S' \\ T'^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/s_{33}^E & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T^x \end{pmatrix}$$

Fasst man die drei Matrizen multiplikativ zu einer Gesamt-Matrix zusammen, erhält man:

$$\begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e_{33} s_{33}^E} & \dfrac{-1}{e_{33}} \\ \dfrac{\varepsilon_{33}^S}{e_{33} s_{33}^E} + e_{33} & \dfrac{-\varepsilon_{33}^S}{e_{33}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d & -1/e \\ 1/g & -1/h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T^x \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} D \\ T^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{33}^S & e_{33} \\ -e_{33} & 1/s_{33}^E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}$$

Bei dieser Darstellung ist die Determinante der Kettenmatrix +1, wie bei Datenblättern üblich. Die Piezo-Parameter können wie folgt umgerechnet werden:

$$d = e \cdot s^E = g \cdot \varepsilon^T; \qquad e = d/s^E = h \cdot \varepsilon^S; \qquad g = h \cdot s^D = d/\varepsilon^T; \qquad h = g \cdot c^D = e/\varepsilon^S;$$

$$s^E - s^D = d^2/\varepsilon^T = g^2 \cdot \varepsilon^T = d \cdot g; \qquad \varepsilon^T - \varepsilon^S = d^2/s^E = e^2 \cdot s^E = d \cdot e$$

Bei diesen Formeln bedeuten die hochgestellten Buchstaben Nullsetzen der jeweiligen Größe, also z.B. ε^T = Dielektrizitätskonstante bei nullgesetzter (mechanischer) Normalspannung T. Damit sind aber immer externe Größen gemeint: In Abb. 6A.3 also $T^x = 0$, und nicht $T'^x = 0$, bzw. $D = 0$, und nicht $D' = 0$. Bei den anderen beiden Signalgrößen ist diese Unterscheidung nicht nötig, wegen $E = E'$ und $S = S'$. Die tiefgesetzten Indizes sind mit anzugeben, wenn die räumliche Orientierung spezifiziert werden soll, z.B. d_{33} (Dickenschwinger), d_{15} (Dicken-Scherschwinger), d_{25} (Flächen-Scherschwinger).

Neben der Systembeschreibung mit differentiellen (längen- und flächenbezogenen) Größen erfolgt auch eine integrale (makroskopische, globale) Darstellung, bei der *U*, *I*, *v*, *F* anstelle von *E*, *D*, *S*, *T* zur Anwendung kommen. Die elektrische Feldstärke *E* ist die längenspezifische elektrische Spannung *U*, die mechanische Spannung *T* ist die flächenspezifische Kraft *F*:

$$E = U / l \qquad T = F / A \qquad I = A \cdot j\omega D \qquad v = l \cdot j\omega S$$

Bei den anderen beiden Größen ist eine zeitliche Differentiation (bzw. Integration) erforderlich, die in der spektralen Darstellung einer Multiplikation mit (bzw. einer Division durch) $j\omega$ entspricht. Alle Signale sind – wie immer in der allgemeinen Signaltheorie – komplex; auf das Unterstreichen wird oft verzichtet:

$$I = dQ/dt \;\Leftrightarrow\; \underline{I} = A \cdot j\omega \underline{D} \qquad v = d\xi/dt = l \cdot dS/dt \;\Leftrightarrow\; \underline{v} = l \cdot j\omega \underline{S}$$

Die mikroskopische Beschreibung mit differentiellen Größen untersucht den statischen Belastungsfall ($f = 0$). Eine Schnelle (Schwinggeschwindigkeit) als Feldgröße wäre da aber wenig hilfreich, deshalb wird stattdessen ihr längenbezogenes Integral, die relative Verformung *S* verwendet. Entsprechend wird die Stromstärke *I*, die im statischen Lastfall null ist, durch ihr flächenbezogenes Integral, die Ladungsdichte (Verschiebungsdichte) *D* ersetzt. Für den praktischen Einsatz ist dieser statische Lastzustand allerdings weniger relevant: Die elektrischen Widerstände können nicht unendlich groß gemacht werden, deshalb fließt immer ein Strom, der zu Umladungsvorgängen führt. Aus diesem Grund wird in der Praxis meist mit *U*, *I*, *v*, *F* gerechnet. In integraler Schreibweise lauten die Gleichungen des idealen Piezowandlers:

$$F' = U' \cdot \alpha \qquad v' = I' / \alpha \qquad \alpha = eA / l \qquad \text{integrale Schreibweise}$$

Die Vorzeichen orientieren sich an Abb. 6A.2, sie entsprechen somit nicht den Datenblattkonventionen. Die Apostrophe bringen zum Ausdruck, dass der ideale Wandlungseffekt gemeint ist, ohne die Beteiligung mechanischer oder elektrischer Zweipole. In **Abb. 6A.4** ist ein Blockschaltbild dargestellt, das im Unterschied zu Abb. 6A.2 jetzt integrale Größen enthält. Die Zweipolparameter ändern sich entsprechend:

$$C^v = \frac{A \cdot \varepsilon^S}{l} \qquad n^U = \frac{l}{A \cdot s^E} \qquad C = Q/U \qquad n = \xi/F$$

Für den festgebremsten Fall ($S = 0$ bzw. $v = 0$) wird aus der Dielektrizitätskonstante ε^S die Kapazität C^v, für den Kurzschlussfall ($E = 0$ bzw. $U = 0$) wird aus dem Elastizitätskoeffizient s^E die Feder-Nachgiebigkeit n^U.

Cave: s^E bezeichnet in diesem Kapitel nicht die Steifigkeit (= Kraft / Auslenkung) , sondern den Elastizitätskoeffizient (= 1 / Elastizitätsmodul)!

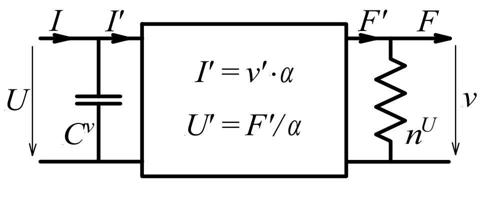


Abb. 6A.4: Blockschaltbild des Piezowandlers. Die im Bild angegebene Kapazität ist die Kristallkapazität aus Abb. 6.1 ($C^v = C_K$), die angegebene Nachgiebigkeit ist reziprok zur Kristallsteifigkeit: $n^U = 1 / s_K$.