Der Betrag einer Allpassfunktion ist 1, die Phase dreht für $0 : f : \infty$ um $n \cdot \pi$, n ist die Ordnung der Allpassfunktion. Für $f = 0$ gilt $r_v = -1$, die Schnelle-Welle wird mit umgedrehtem Vorzeichen reflektiert. Für $f = f_r$ ergibt sich $r_v = +1$, für $f \to \infty$ erhält man wieder $r_v = -1$.

Somit bewirkt ein Resonator als Leitungsabschluss eine zusätzliche Phasendrehung. Eigenschwingungen (Teiltöne) der Saite entstehen bei den Frequenzen, bei denen die Phasendrehung für einen vollständigen Umlauf ($2L$) gerade ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Für dispersionsfreie Wellenausbreitung auf einer fest eingespannten Saite ergeben sich damit Teiltonfrequenzen, die ganzzahlig vielfach zur Grundfrequenz liegen. Wenn aber ein Lager als Resonator wirkt, ergibt sich eine zusätzliche Phasendrehung, die (im Beispiel) einen **zusätzlichen Teilton** erzeugt. Für Resonatoren höherer Ordnung entstehen mehrere zusätzliche Teiltöne.

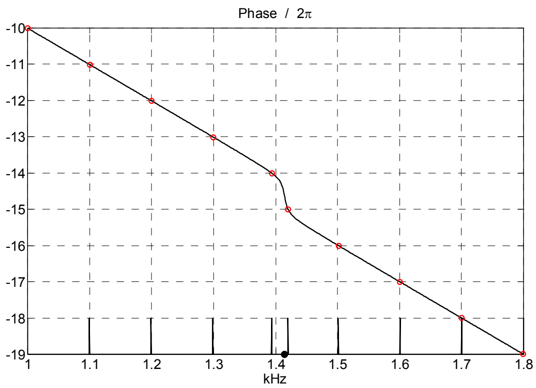

Abb. 2.21: Phasendrehung längs eines Saitenumlaufs. Ein Saitenlager ist als Resonator mit 1,415 kHz Resonanzfrequenz ausgeführt. Durch die schmalbandige zusätzliche Phasendrehung um 2π entsteht eine zusätzliche Eigenfrequenz.

In **Abb. 2.21** ist die Phasendrehung dargestellt, die sich für eine mit 100 Hz Grundfrequenz schwingende Saite für einen Umlauf (doppelte Saitenlänge) ergibt. Die Phase ist negativ, wie in der neueren Literatur für Verzögerungen üblich. Ein Saitenlager ist als Resonator mit einer Resonanzfrequenz von 1,415 kHz ausgeführt (Punkt auf der Abszisse). Am unteren Bildrand sind die Teiltonfrequenzen mit Strichen angegeben. Der eigentlich bei 1,40 kHz liegende Teilton wird durch die Lagerresonanz deutlich tiefer gestimmt, und bei 1,42 kHz entsteht ein zusätzlicher Teilton. Alle anderen Verstimmungen sind so gering, dass sie im Bild nicht zu erkennen sind.

Das spektrale Differential $-d\varphi/d\omega$ ergibt die **Gruppenlaufzeit** (Kap. 1.2.1). Die Steigung der Phasenfunktion ist praktisch konstant, mit Ausnahme des Bereichs um die Lagerresonanz. Somit ist auch die Gruppenlaufzeit überall konstant, nur im Bereich um die Lagerresonanz ist sie verlängert, was im Spektrogramm (Abb. 1.8) zu Verwerfungen führt.

2.6 Leitungsverluste

Ideale Massen und Federn speichern Energie, wandeln sie aber nicht in Wärme um. Sie werden deshalb als verlustfreie Elemente bezeichnet. Demgegenüber weist jede reale Saite auch Reibwiderstände auf, in denen die Schwingungsenergie irreversibel in Wärme umgewandelt wird. Die Leitungstheorie berücksichtigt diese Energieverluste durch verteilte, differentiell kleine Widerstände. Für das Modell ist es unerheblich, ob die Verluste durch mechanische Reibung in der Saite (innere Dämpfung) entstehen, oder dadurch, dass die Saite Schallenergie *direkt* abstrahlt (d.h. ohne Umweg über den Korpus).

Eine tiefe E-Saite, deren Pegel beim Ausschwingen in 10 s um 10 dB abnimmt, verliert pro Grundschwingungsperiode ca. 2,8 ‰ Schwingungsenergie. Die Saite zählt damit zu den schwach bedämpften Systemen (Güte Q = 2249), und kann in guter Näherung als *Leitung mit geringen Verlusten* aufgefasst werden. Berücksichtigt man auch noch, dass der Hauptteil der gemessenen Verluste ja gar nicht von der Saite selbst, sondern von den Lagern kommt, so ist diese Näherung in hohem Maße gerechtfertigt.

Bei einer **Leitung mit geringen Verlusten** geht man davon aus, dass Phasen- und Gruppengeschwindigkeit durch die Dämpfung praktisch nicht verändert werden. Lediglich die Schwingungsamplitude nimmt beim Durchlaufen der Leitung geringfügig ab. Für Leitungslängen im Bereich der Saitenlänge sind die Amplitudendämpfungen so gering, dass sie in vielen Fällen ganz vernachlässigt werden können. Wenn Signale aber häufig reflektiert werden und sekundenlanges Ausschwingen Ziel der Untersuchung ist, darf die Amplitudendämpfung nicht mehr vernachlässigt werden. Es ist allerdings nicht immer erforderlich, eine differentiell verteilte Dämpfung anzusetzen; sofern auf der Saite nur diskrete Punkte interessieren, ist die Kettenschaltung eines dämpfungsfreien Laufzeitgliedes und einer laufzeitfreien Dämpfung ein gut brauchbares Modell (Kap. 2.8).

Der Versuch einer Berechnung der **inneren Saitenverluste** fördert Kurioses zutage: Die in verschiedenen Büchern für Stahl angegebenen Verlustfaktoren unterscheiden sich um den Faktor 14. Selbst in ein und demselben Buch findet man Abweichungen um 600%. Dies mag daran liegen, dass mikrophysikalische Verlusteffekte herstellungsabhängig sind, oder daran, dass es *den* Stahl nicht gibt, wahrscheinlicher ist aber, dass 'interne' Verluste auch Abstrahlverluste beinhalten. Der Verlustfaktor d = 0,0001 (*Gahlau et al., Geräuschminderung durch Werkstoffe und Systeme, Expert Sindelfingen 1986*) erscheint plausibel, hiermit erhält man für 82,4 Hz einen Pegelabfall mit 0,22 dB/s; das ist deutlich kürzer als typische Messwerte (0,6 dB/s) und lässt Raum für zusätzliche Dämpfungsmechanismen. Das im selben Buch mit nur 14 Seiten Abstand spezifizierte d = 0,0006 ist hingegen zu hoch (1,3 dB/s).

Die Hoffnung auf eine einheitliche Terminologie muss wohl aufgegeben werden; zu eingefahren sind die Wege. Was da mit Dämpfungsfaktor, Dämpfungskoeffizient, Dämpfungsgrad, Verlustfaktor etc. bezeichnet wird, ist sicher (?) innerhalb einer Veröffentlichung konsistent; interindividuelle Unterschiede sind allerdings die Regel. So verwundert es nicht, wenn ein Autor den aperiodischen Grenzfall (der anderswo 'kritische Dämpfung' heißt) mit d = 1 angibt, während der (ebenso berühmte Kollege) im anderen Buch für denselben Fall d = 2 spezifiziert. Man kann damit leben 💣, aber man muss es wissen (sapienti sat).

Die quantitative Berechnung der direkten **Abstrahlverluste** ist eher möglich. In [9] sind unter dem Stichwort "air damping" Formeln zur Wirkleistungsabstrahlung angegeben und für Bass-Saiten ausgewertet. Die Verluste steigen mit zunehmender Frequenz, und nehmen ab mit zunehmendem Saitendurchmesser. Die Berechnungen in [9] betreffen die Grundtondämpfung, höhere Teiltöne werden tendenziell schlechter abgestrahlt, was geringere Saitenbedämpfung bedeutet♣. Für Gitarrensaiten erhält man strahlungsbedingte Amplituden-Zeitkonstanten im Bereich 20 s (leere E_2-Saite) bis 2 s (leere E_4-Saite). Bei den tiefen Gitarren-Saiten kann man Strahlungsverluste folglich vernachlässigen, bei den hohen Saiten liegen sie im Grenzbereich (Messwerte z.B. 1,7 s).

♣ Ergänzend kann betrachtet werden, dass sich Griffbrett und Korpus als Reflektoren in unmittelbarer Nachbarschaft der Saite befinden; die Berechnung der Strahlungsimpedanz (Wirkungsgrad eines oszillierenden Zylinders) wird hierdurch erschwert.

Als **Fazit** kann man festhalten: Innere Verluste und Strahlungsverluste können vernachlässigt werden, solange man nur Wellenausbreitung über kurze Saitenstücke betrachtet. Analysiert man länger dauernde Schwingungen, findet man bei E-Gitarren Dämpfungsmechanismen, deren Wirkung zu hohen Frequenzen hin zunimmt (Kap. 7.7), und zusätzliche, frequenzselektive Absorptionen (z.B. Stegresonanzen). Bei Akustikgitarren ist auch im tieffrequenten Bereich mit wesentlichen Absorptionen zu rechnen, weil ein nicht zu vernachlässigender Teil der Schwingungsenergie an die Auflager (Steg, Bünde) abgegeben wird.

2.7 Dispersive Biegewellen

Die einfache Leitungstheorie geht von ortsunabhängigem Wellenwiderstand und frequenzunabhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeit aus. Die Transversalwellen der Gitarrensaite breiten sich aber **dispersiv**, d.h. mit frequenzabhängiger Geschwindigkeit aus; die hohen Frequenzen laufen schneller als die tiefen (Kap. 1.2.1). Ursache hierfür ist die Biegesteifigkeit; sie vergrößert die spannkraftabhängige Quersteifigkeit.

Die Modellierung der Saite als dispersive Leitung ist aufwändig und nicht immer erforderlich. Zumeist interessieren nämlich nur zwei oder drei Punkte auf der Saite (Sattel, Anzupfort und Steg), ggf. kommt noch eine Tonabnehmerposition hinzu. Die Leitungsstücke zwischen den diskreten Punkten können leicht durch Allpässe nachgebildet werden (Kap. 2.8). Wenn allerdings die Reflexionsbedingungen genau beschrieben werden sollen, ist ein detaillierteres Modell erforderlich. Für eingeschwungene (monofrequente) Teiltöne ergibt sich die einfachste Lösung: Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand ändern sich nur relativ wenig als Funktion der Frequenz; bei schmalbandiger Betrachtung können sie als konstant angenommen werden. Ein- und Ausschwingvorgänge erstrecken sich aber über einen Frequenz*bereich*, so dass in diesen Fällen mit frequenzabhängigen Größen gearbeitet werden muss.

In Abb. 2.5 wurde für die dispersionsfreie Saite ein einfaches Modellelement vorgestellt. Als beschreibende Signalgrößen reichten die orts- und zeitabhängige Kraft und Schnelle. Die Biegesteifigkeit der realen Saite erfordert aber, dass zusätzlich zur (Quer-) **Kraft *F*** ein orts- und zeitabhängiges **Biegemoment *M*** spezifiziert wird, und dass ergänzend zur (Quer-) **Schnelle *v*** eine **Winkelgeschwindigkeit *w*** eingeführt wird. Als Konsequenz erhält man eine frequenzabhängige Phasenlaufzeit (Abb. 1.6). Das dispersive Leitungselement ist nicht mehr als Zweitor (Vierpol) beschreibbar, vielmehr muss ein **Viertor** (Achtpol) spezifiziert werden [11]. Seine Eingangssignalgrößen sind F_1, M_1, v_1, w_1, seine Ausgangssignalgrößen sind F_2, M_2, v_2, w_2. Da die Saitenquerabmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind, dürfen Schubdeformationen und Rotations-Trägheitsmomente vernachlässigt werden (Euler-Bernoulli-Theorie des Biegestabes), so dass als Systemgrößen (im Inneren des Viertors) die längenspezifische **Masse *m'***, die längenspezifische **Nachgiebigkeit *n'***, und die **Biegesteifigkeit *B*** übrig bleiben.

Die biegesteife Saite hat *zwei* **Wellenwiderstände** $Z_F = F/v$ bzw. $Z_M = M/w$, und *zwei* Wellenleistungen $P_F = Fv$ bzw. $P_M = Mw$. An beiden Saitenlagern (Steg, Sattel) sind je *zwei* Lagerimpedanzen wirksam, und zusätzlich können in jedem Lager Verkopplungen zwischen den vier Signalgrößen auftreten. Beispielsweise kann eine Randkraft zwangsweise ein Randmoment erzeugen, oder eine Auslenkung führt zwangsläufig zu einer Verdrehung. Da alle diese Beziehungen frequenz- und richtungsabhängig auftreten, sind Vereinfachungen und Näherungen unerlässlich.