2.5 Reflexionsberechnung

In Kap. 2.2 wurde zur Beschreibung einer Wellenreflexion das Spiegelwellenmodell eingeführt: Hierbei läuft die betrachtete Welle ungehindert über das Lager hinweg (und verschwindet), gleichzeitig tritt aus dem Lager eine entgegenlaufende Spiegelwelle hervor. Alternativ zu diesen zwei ungehindert fortschreitenden Wellen kann es zweckmäßig sein, nur *eine* Welle zu betrachten, die am Lager nach bestimmten Kriterien reflektiert wird. Insbesondere bei der Modellierung der Saite mit Laufzeitgliedern bringt dieses Reflexionsmodell Vorteile.

2.5.1 Der Reflexionsfaktor

Jede fortschreitende Welle (Wanderwelle) transportiert Energie; bei der elektrischen Leitung magnetische und elektrische Feldenergie, bei der mechanischen Leitung kinetische und potentielle Energie. Die zeitlichen Mittelwerte der mechanischen Energien berechnen sich zu:

$$E_k = dm \cdot v^2 / 2\,; \quad E_p = dn \cdot F^2 / 2 \qquad \xrightarrow{F = v \cdot Z_W} \qquad E_k = E_p$$

An jeder Stelle der Leitung sind die beiden transportierten (gemittelten) Energien gleich groß. Wenn die Welle ein Saitenende erreicht, kann diese Energie nicht ins Nichts verschwinden; sie wird entweder in die Lagerung eingekoppelt (und dort weitergeleitet oder dissipiert), oder sie wird (ganz oder teilweise) reflektiert.

Jedes Lager weist eine komplizierte **Lagerimpedanz** auf. Sie ist anisotrop, d.h. abhängig von der Richtung der Schwingungsebene, und frequenzabhängig. Die Lagernachgiebigkeit ist der Kehrwert der komplexen Lagerimpedanz, sie ist komplex als **Admittanz** definiert:

$$\underline{Y} = \underline{v} / \underline{F} = G + jB \qquad \text{Admittanz} = \text{Konduktanz} + j \cdot \text{Suszeptanz}$$

$$\underline{Z} = \underline{F} / \underline{v} = R + jX \qquad \text{Impedanz} = \text{Resistanz} + j \cdot \text{Reaktanz} = 1/\text{Admittanz}$$

Ein unnachgiebiges Lager (kleine Admittanz, große Impedanz) kann Kräfte aufnehmen, ermöglicht aber keine Bewegung; beim nachgiebigen Lager ist's umgekehrt. Saiten sind in relativ unnachgiebigen Lagern verankert. Völlig unnachgiebig dürften sie nur für die Elektro-Gitarre sein, in der Realität ist ein derartiges Ideal natürlich nicht erreichbar. Wären die Saitenlager der Akustik-Gitarre völlig unnachgiebig, so könnten sie (wegen $v = 0$) von der Saite keine Energie aufnehmen und zur Abstrahlung weiterleiten.

Die Lagerimpedanz (bzw. –admittanz) verknüpft die beiden Feldgrößen Kraft und Schnelle, deren Produkt die Leistung P ist. Die Stetigkeitsbedingungen fordern für beide Saitenenden: $F_{\text{Saite}} = F_{\text{Lager}}$ und $v_{\text{Saite}} = v_{\text{Lager}}$. Auf der Saite ist der Quotient F/v für die fortschreitende Welle gleich Z_W, am Lager kann dieser Quotient aber jeden Wert annehmen; dies ist zunächst ein Widerspruch. Wenn eine 2-N-Kraftwelle über eine Leitung mit einem Wellenwiderstand von 1 Ns/m läuft, dann ist die Schnelle 2 m/s. Trifft diese Welle nun auf ein Lager mit 10 Ns/m Lagerimpedanz, so kann ihre Leistung vom Lager nicht vollständig aufgenommen werden. Das Lager "entnimmt" sich von der ankommenden Welle die Teilleistung, die mit ihrer F- und v-Komponente zur Lagerimpedanz passt, der Rest wird "zurückgeschickt".

Am Lager und an jedem Leitungspunkt überlagern sich somit *zwei* in entgegengesetzte Richtungen laufende Wellen (hinlaufend und reflektiert). Kraft und Schnelle ergeben sich damit als Summe zweier Werte. Auch die vom Anzupfort in Gegenrichtung laufende Welle muss mit ihrer Reflexion berücksichtigt werden, sowie die in Folge entstehenden weiteren Reflexionen. Alle Wellen werden nach dem Durchlaufen einer Saitenlänge wieder reflektiert, so dass sich immer mehr Wellen überlagern. Die Summe aller überlagerten Wellen ergibt den **eingeschwungenen Zustand**, der mit den Mitteln der Netzwerkanalyse berechnet werden kann. Wenn für diesen eingeschwungenen Zustand an irgendeinem Punkt z die Leitungsimpedanz $Z(z)$ berechnet wird, so erhält man hierfür nicht den Wellenwiderstand (zumindest nicht im allgemeinen Fall).

Noch ist die im o.a. Beispiel "zurückgeschickte" Welle unbekannt. Zur Berechnung setzt man die an jedem Leitungspunkt wirkende Kraft $F(z)$ und Schnelle $v(z)$ als Summe zweier Wellen an♣. Die (zum Lager) hinlaufenden Wellen $F_h(z)$ und $v_h(z)$ sind gegeben; hierbei reicht die Kenntnis einer Größe, die andere kann über Z_W berechnet werden. Die reflektierten Wellen $F_r(z)$ und $v_r(z)$ sind ebenfalls über Z_W verknüpft, aber noch unbekannt. Diese fehlende Bedingung wird von der Lagerimpedanz geliefert, denn am Lagerpunkt (z.B. bei $z = 0$) ist der Quotient aus $F(z = 0)$ und $v(z = 0)$ gleich der **Lagerimpedanz** Z_L. Das **Vorzeichen** sorgt, wie so oft, für Überraschung: Am rechten Lager gilt $Z_L = F/v$, am linken $Z_L = -F/v$. Am leichtesten erkennt man diese Vorzeichenumkehr in Abb. 2.5: Ein linkes Lager kann man dadurch erzeugen, dass F_1 null wird; die linke Masse entfällt dann, die als "Trägheitsgesetz" bezeichnete Formel führt auf ein Minuszeichen. In ähnlicher Weise gibt $F_2 = 0$ ein Pluszeichen. Auch der Wellenwiderstand hat seine Vorzeichenbesonderheit: Bei nach links laufenden Wellen ist Z_W negativ, bei nach rechts laufenden positiv (Kap. 2.1). Überlagert man hin- und rücklaufende Wellen, müsste man mit zwei verschiedenen Wellenwiderständen rechnen. In der folgenden Berechnung ist jedoch Z_W **grundsätzlich positiv**, bei nach links laufenden Wellen wird ein Minuszeichen eingefügt. Die folgende Berechnung betrachtet eine nach links auf das linke Lager ($z = 0$) hinlaufende Welle, und eine nach rechts reflektierte Welle:

$$F_h = -v_h \cdot Z_W; \qquad F_r = v_r \cdot Z_W; \qquad Z_W = \sqrt{\Psi \cdot m'} \quad > 0$$

$$F_L = F_h + F_r; \qquad v_L = v_h + v_r; \qquad Z_L = -F_L / v_L$$

$$(v_h + v_r) \cdot Z_L = -(F_h + F_r) = -(-v_h + v_r) \cdot Z_W \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_r}{v_h} = \frac{Z_W - Z_L}{Z_W + Z_L}$$

Das Verhältnis der komplexen Amplituden aus rück- und hinlaufender Welle ist der komplexe **Reflexionsfaktor** r. Er hängt vom Wellenwiderstand Z_W und von der Lagerimpedanz Z_L ab:

$$r_v = \frac{v_r}{v_h} = \frac{Z_W - Z_L}{Z_W + Z_L} \qquad r_F = \frac{F_r}{F_h} = \frac{v_r \cdot Z_W}{-v_h \cdot Z_W} = -r_v \qquad \text{Reflexionsfaktor}$$

Drei Sonderfälle sind interessant: Für $Z_L = Z_W$ **(Anpassung)** wird der Reflexionsfaktor null, die Welle wird nicht reflektiert, das Lager nimmt die gesamte Wellen-Energie ohne Reflexion auf. Für $Z_L \to 0$ wird der Schnelle-Reflexionsfaktor +1, die Schnelle-Welle wird vollständig gleichphasig reflektiert, die Kraft-Welle vollständig gegenphasig.

♣ F, v und Z sind komplex; auf das Unterstreichen wird verzichtet.

Für $Z_L \to \infty$ wird der Schnelle-Reflexionsfaktor -1, die Schnelle-Welle wird vollständig gegenphasig reflektiert, die Kraft-Welle vollständig gleichphasig. Dieser Fall gehört zu einem unbeweglichen Lager, an dem die Saiten-Schnelle immer null ist. Eine Gitarrensaite darf natürlich nicht mit $r = 0$ betrieben werden, sonst könnte sich keine "periodische" Schwingung einstellen. Mit $r = \pm 1$ würde eine Schwingung nie mehr abklingen – zumindest im Rahmen der hier zugrundegelegten Idealisierungen.

In Kap. 1.5 wurden Untersuchungen zum Ausschwingen vorgestellt. Wenn die Schwingung einer E_2-Saite z.B. in 12 s um 60 dB (rein exponentiell) abnimmt, dann nimmt sie in 12 ms (1 Periode) um 0,06 dB ab; dies entspricht 0,7%. Der Reflexionsfaktor ist damit 0,993 pro Periode. Nun wird aber eine Saitenwelle pro Periode zweimal reflektiert, also muss man diese 0,7% Absorption auf die Steg- und Sattelreflexion aufteilen, z.B. Sattel 0,3% und Steg 0,4%. Typischerweise ergibt sich ein Reflexionsfaktor nahe bei 1.

Mit einer rein **reellen Lagerimpedanz** wird der Reflexionsfaktor reell, denn Z_W ist auch reell. Für reelles r ist die Phasendrehung zwischen hin- und rücklaufender Welle entweder 0° oder 180°. Im Gegensatz zur Reflexion an einer imaginären Lagerimpedanz ist die Amplitude der rücklaufenden Welle nun kleiner als die der hinlaufenden. Bei der Gitarrensaite ist die Lagerimpedanz Z_L groß gegenüber Z_W, damit erhält man als Näherung:

$$r_v = \frac{Z_W - Z_L}{Z_W + Z_L} = -\frac{1 - Z_W/Z_L}{1 + Z_W/Z_L} \approx -\left(1 - Z_W/Z_L\right)\cdot\left(1 - Z_W/Z_L\right) \approx -\left(1 - 2Z_W/Z_L\right)$$

Ein negativ-reeler Reflexionsfaktor zeigt an, dass die Schnelle-Reflexion gegenphasig erfolgt. Ist der Realteil des Reflexionsfaktors ungleich null, fließt Wirkenergie in die Lagerpunkte (**Dissipation,** Saitenbedämpfung). Für die Saite ist es dabei gleichgültig, ob diese Energie vom Korpus abgestrahlt oder direkt im Saitenlager in Wärme umgewandelt wird – die abfließende Energie steht der Saite nicht mehr als Schwingungsenergie zur Verfügung.

Das andere Extrem ist eine rein imaginäre Lagerimpedanz, wie sie von einer Masse oder einer Feder gebildet wird. Auch wenn das Lager aus mehreren Massen und Federn aufgebaut ist, so ergibt sich *bei einer Frequenz* immer nur eine entweder träge oder steife Lagerimpedanz. Für **rein imaginäre Lagerimpedanz** sind Zähler und Nenner des Reflexionsfaktors konjugiert komplex; der Betrag von r ist somit 1. Und zwar exakt 1! Hin- und rücklaufende Welle werden zwar in ihrer Phase verschoben, ihr Betrag bleibt aber erhalten, die Schwingungsenergie nimmt nicht ab. Nachdem sich aber die Phase der fortschreitenden Wellen auch als Funktion des Ortes ändert (Wellengleichung), kann man die phasenverschobene Reflexion modellhaft als nicht-phasenverschobene Reflexion eines anderen Ortes auffassen. Man stellt sich vor, die Welle würde ein kleines Stückchen hinter dem Steg ohne Phasendrehung reflektiert, und die von diesem Umweg hervorgerufene Phasendrehung entspricht der realen Reflexion. Je nach Vorzeichen kann es auch erforderlich sein, den gedachten Reflexionspunkt vor den Steg zu legen – und das gleiche gilt auch für den Sattel. Die effektive Saitenlänge kann somit von der geometrischen abweichen, und je nach Lagerimpedanz frequenzabhängig kürzer oder länger werden. Dies beeinflusst die Frequenzen der Teiltöne:

Ein federndes Lager verlängert die effektive Saitenlänge und erniedrigt die Schwingfrequenz; je weicher die Feder, desto niedriger *f*. Ein massebelastetes Lager verkürzt die Saite und erhöht die Schwingfrequenz; je leichter die Masse, desto höher die Frequenz.

Der Reflexionsfaktor der realen Saite hat sowohl eine reelle, als auch eine imaginäre Komponente; beide hängen von der Frequenz ab. Der Realteil bewirkt eine Saitenbedämpfung, der Imaginärteil verstimmt die Saite. Zusätzlich müssten auch noch saiteninterne Mechanismen berücksichtigt werden; die Theorie dieses Kapitels betrifft aber nur die verlustfreie Leitung.

BEISPIEL: Eine gespannte Saite (L = 64 cm, $\rho = 8 \cdot 10^3$ kg/m^3, S = 0,5 mm^2, und Ψ = 100 N) ist auf einer Seite fest, auf der anderen Seite federnd aufgehängt; s = 10.000 N/m, $s \neq s(f)$.

Hieraus ergibt sich: Z_W = 0,633 Ns/m, c = 158,1 m/s, f_G = 123,5 Hz (ohne Federeinfluss). Mit Berücksichtigung der federnden Randeinspannung erniedrigt sich die Grundfrequenz f_G:

$$Z_L = s/j\omega = -j \cdot 12{,}89\,\mathrm{Ns/m} \qquad r = \frac{Z_W - Z_L}{Z_W + Z_L} = -0{,}9952 + 0{,}0979j = e^{j \cdot 174{,}4°}$$

Der Betrag des Reflexionsfaktors ist 1, der Winkel ist um 5,6° kleiner als 180°. Beim Durchlaufen einer vollen Saitenlänge L wird die Phase der Welle um 180° gedreht, eine Drehung um 5,6° entspricht damit einer Weglänge von 2 cm. Die einseitig federnde Lagerung verlängert die Saite effektiv um 2 cm, die Grundfrequenz wird hierdurch auf 119,8 Hz erniedrigt[♣]. Die relative Verstimmung ist für alle Harmonischen dieselbe (Dispersion vernachlässigt).◊

2.5.2 Ein Resonator als Saitenlager

Jedes reale Saitenlager muss neben federnden Komponenten auch Massen aufweisen, und damit sind Lagerresonanzen unvermeidlich. Bei den Resonanzfrequenzen kompensieren sich die Reaktanzen (bzw. Konduktanzen), Impedanz und Admittanz sind rein reell. Bei allen anderen Frequenzen sind Impedanz und Admittanz komplex [3].

Als Lager wird beispielhaft ein **verlustfreies** Feder/Masse-System untersucht. Seine Lagerimpedanz und Resonanz(kreis)frequenz berechnen sich zu:

$$Z_L = j\omega m + s/j\omega \qquad \omega_r = \sqrt{s/m} \qquad f_r = \omega_r / 2\pi$$

Für $\omega = \omega_r$ wird die Lagerimpedanz null (keine Kraft trotz Bewegung), für $\omega < \omega_r$ wirkt das Lager federnd (federgehemmt), für $\omega > \omega_r$ wirkt es träge (massegehemmt). Unterresonant wird eine angekoppelte Saite effektiv verlängert, überresonant verkürzt. Selbst wenn man die Saite dispersionsfrei annimmt, liegen die Teiltonfrequenzen somit nicht mehr harmonisch; im Bereich unterhalb der Lagerresonanzfrequenz werden sie erniedrigt, oberhalb der Lagerresonanzfrequenz erhöht. Für den Schnelle-Reflexionsfaktor erhält man:

$$r_v = \frac{Z_W - Z_L}{Z_W + Z_L} = \frac{Z_W - j(\omega m - s/\omega)}{Z_W + j(\omega m - s/\omega)} = -\frac{p^2 m - pZ_W + s}{p^2 m + pZ_W + s} \qquad p = j\omega$$

Die Frequenzabhängigkeit des Reflexionsfaktors $r_v(j\omega)$ führt auf eine gebrochen rationale Funktion zweiter Ordnung. Die geraden Zähler- und Nennerpotenzen sind identisch, die ungeraden haben invertiertes Vorzeichen; Zähler und Nenner sind somit zueinander konjugiert komplex. Eine derartige Frequenzabhängigkeit heißt **Allpassfunktion**.

♣ Reale Lager sind wesentlich steifer, die Verstimmung ist bei ihnen geringer.

Der Betrag einer Allpassfunktion ist 1, die Phase dreht für $0 : f : \infty$ um $n \cdot \pi$, n ist die Ordnung der Allpassfunktion. Für $f = 0$ gilt $r_v = -1$, die Schnelle-Welle wird mit umgedrehtem Vorzeichen reflektiert. Für $f = f_r$ ergibt sich $r_v = +1$, für $f \to \infty$ erhält man wieder $r_v = -1$.

Somit bewirkt ein Resonator als Leitungsabschluss eine zusätzliche Phasendrehung. Eigenschwingungen (Teiltöne) der Saite entstehen bei den Frequenzen, bei denen die Phasendrehung für einen vollständigen Umlauf ($2L$) gerade ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Für dispersionsfreie Wellenausbreitung auf einer fest eingespannten Saite ergeben sich damit Teiltonfrequenzen, die ganzzahlig vielfach zur Grundfrequenz liegen. Wenn aber ein Lager als Resonator wirkt, ergibt sich eine zusätzliche Phasendrehung, die (im Beispiel) einen **zusätzlichen Teilton** erzeugt. Für Resonatoren höherer Ordnung entstehen mehrere zusätzliche Teiltöne.

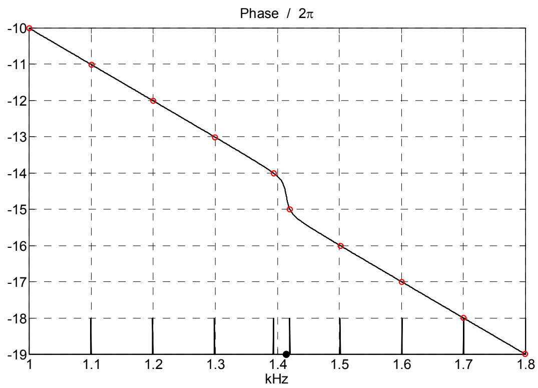

Abb. 2.21: Phasendrehung längs eines Saitenumlaufs. Ein Saitenlager ist als Resonator mit 1,415 kHz Resonanzfrequenz ausgeführt. Durch die schmalbandige zusätzliche Phasendrehung um 2π entsteht eine zusätzliche Eigenfrequenz.

In **Abb. 2.21** ist die Phasendrehung dargestellt, die sich für eine mit 100 Hz Grundfrequenz schwingende Saite für einen Umlauf (doppelte Saitenlänge) ergibt. Die Phase ist negativ, wie in der neueren Literatur für Verzögerungen üblich. Ein Saitenlager ist als Resonator mit einer Resonanzfrequenz von 1,415 kHz ausgeführt (Punkt auf der Abszisse). Am unteren Bildrand sind die Teiltonfrequenzen mit Strichen angegeben. Der eigentlich bei 1,40 kHz liegende Teilton wird durch die Lagerresonanz deutlich tiefer gestimmt, und bei 1,42 kHz entsteht ein zusätzlicher Teilton. Alle anderen Verstimmungen sind so gering, dass sie im Bild nicht zu erkennen sind.

Das spektrale Differential $-d\varphi/d\omega$ ergibt die **Gruppenlaufzeit** (Kap. 1.2.1). Die Steigung der Phasenfunktion ist praktisch konstant, mit Ausnahme des Bereichs um die Lagerresonanz. Somit ist auch die Gruppenlaufzeit überall konstant, nur im Bereich um die Lagerresonanz ist sie verlängert, was im Spektrogramm (Abb. 1.8) zu Verwerfungen führt.

2.6 Leitungsverluste

Ideale Massen und Federn speichern Energie, wandeln sie aber nicht in Wärme um. Sie werden deshalb als verlustfreie Elemente bezeichnet. Demgegenüber weist jede reale Saite auch Reibwiderstände auf, in denen die Schwingungsenergie irreversibel in Wärme umgewandelt wird. Die Leitungstheorie berücksichtigt diese Energieverluste durch verteilte, differentiell kleine Widerstände. Für das Modell ist es unerheblich, ob die Verluste durch mechanische Reibung in der Saite (innere Dämpfung) entstehen, oder dadurch, dass die Saite Schallenergie *direkt* abstrahlt (d.h. ohne Umweg über den Korpus).