1.6 Das Ausschwingen

Nach dem Anzupfen führt die Saite eine freie, gedämpfte Schwingung aus. Frei bedeutet, dass keine weitere Energie zugeführt wird, gedämpft bedeutet, dass die Schwingungsenergie in Schall und Wärme umgewandelt wird (Dissipation, Abstrahlung). Nicht betrachtet werden soll hierbei die zusätzliche Saiten-Bedämpfung durch Fingerkuppe oder Handballen.

1.6.1 Ein Freiheitsgrad (ebene Polarisation)

Das einfachste Schwingungssystem besteht aus einer Masse, einer Feder und einem Dämpfer. Die Massenkraft ist proportional zur Beschleunigung (Trägheit, NEWTON), die Federkraft ist proportional zu Auslenkung (Steifigkeit, HOOKE), die Dämpferkraft ist proportional zur Schnelle (Reibung, STOKES). Die zeitlich differenzierte Auslenkung ergibt die Schnelle, die zeitlich differenzierte Schnelle ergibt die Beschleunigung [3].

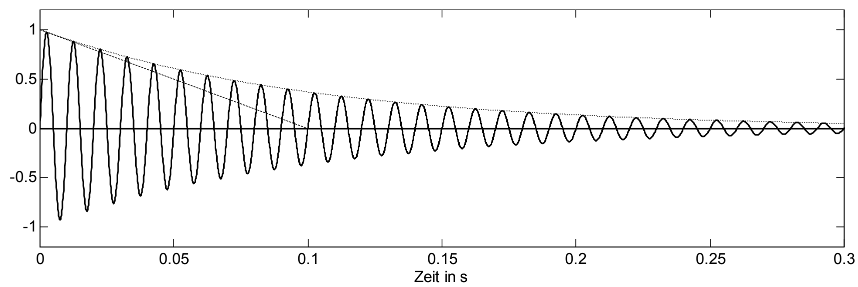
Nach dem Anstoßen entsteht eine "periodische" Schwingung mit der Frequenz f_d. Zeitpunkte mit gleicher Phase, z.B. Maxima, Nulldurchgänge, Minima, folgen äquidistant aufeinander, was zum Begriff **Periode** $T = 1/f_d$ geführt hat. Die Signaltheorie zählt dieses Ausschwingen aber nicht zu den periodischen Signalen, weil die einzelnen Perioden wegen der exponentiellen Abnahme nicht identisch sind. Demgegenüber spricht die Mechanik schon vom periodischen Schwingen, weil die Periodendauer zeitinvariant ist (... non est disputandum).

Die entstehende Schwingung hat drei Parameter: Die Frequenz f_d, die Anfangsphase φ, und die Hüllkurvenzeitkonstante ϑ. In dieser allgemeinen Form lautet die Schwingungsgleichung:

$$\xi(t) = \hat{\xi} \cdot e^{-t/\vartheta} \cdot \sin(2\pi f_d t + \varphi), \qquad t \geq 0$$ Schwingungsgleichung

Für $t = 0$ ergibt die e-Funktion 1, mit zunehmender Zeit nimmt sie gegen 0 ab. Die Phasenverschiebung φ kann für die ersten Betrachtungen zu null angenommen werden. Die Zeitkonstante ϑ bestimmt, wie schnell die Schwingung abklingt: Je kleiner ϑ, desto schneller. Anstelle von ϑ findet man in der Literatur eine Vielzahl anderer Parameter, die leicht umgerechnet werden können. Häufig wird für die Zeitkonstante der Buchstabe τ verwendet, was hier aber erst bei der Pegelmessung zum Einsatz kommt. Insbesondere ist die Verwechslung mit Dämpfungsgrad und Abklingkoeffizient zu vermeiden, die manchmal auch ϑ heißen!

Physikalische Schwingungsgröße kann die Auslenkung, Schnelle oder Beschleunigung sein. Ein Sensor wandelt diese Größen in die Spannung $u(t)$ um, die dann analysiert wird.



$f_d = 100\,\text{Hz}$

$\vartheta = 0{,}1\,\text{s}$

Abb. 1.41: Gedämpfte Schwingung mit 100 Hz, exponentielles Abklingen, Zeitkonstante $\vartheta = 0{,}1\,\text{s}$.

Mit Masse m, Federsteifigkeit s und Reibung W erhält man Frequenz und Zeitkonstante:

$$f_d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{m} - \frac{1}{\vartheta^2}} \qquad \vartheta = \frac{2m}{W}$$ Schwingungsparameter

Wenn man hierbei die Reibung W gegen null gehen lässt, entsteht das unbedämpfte System, mit einer gegen unendlich gehenden Zeitkonstante; die e-Funktion ergibt dann den konstanten Wert 1, die Schwingung klingt nicht mehr ab. **Abb. 1.41** zeigt den Zeitverlauf einer schwach bedämpften Schwingung mit der Frequenz f_d = 100 Hz. Gestrichelt ist der Verlauf der e-Funktion eingezeichnet, deren Tangente die Nulllinie bei ϑ schneidet. Zum Zeitpunkt $t = \vartheta$ hat die Hüllkurve von 1 auf $1/e \approx 0{,}37$ abgenommen.

In der Messtechnik wird das Ausschwingen häufig als **Pegelverlauf** dargestellt. Der Pegel ist ein logarithmisches Maß, das auf unterschiedliche Art bestimmt werden kann. In jedem Fall handelt es sich um einen zeitlichen Mittelwert über ein gewichtetes Messintervall, gemittelt wird über die quadrierte Signalgröße. Häufig anzutreffen ist die exponentielle Mittelung, bei der die Gewichtung exponentielle Form hat und so erfolgt, dass weiter in der Vergangenheit liegende Signalanteile abgeschwächt in die Messung eingehen. Als Parameter der exponentiellen Mittelung wird die **Mittelungszeitkonstante** τ spezifiziert, wobei häufig der Wert $\tau = 125\,\mathrm{ms}$ zu finden ist; diese Mittelungsart wird normgemäß als **FAST** bezeichnet. Die Abklingzeitkonstante ϑ der gedämpften Schwingung darf nicht mit der Mittelungszeitkonstant τ der Pegelmessung verwechselt werden.

Die Pegelmessung umfasst drei aufeinander folgende Operationen: Quadrieren, Mitteln und Logarithmieren. Quadrieren und Logarithmieren sind nichtlineare Operationen, deshalb darf die Reihenfolge nicht vertauscht werden. Nur die **Mittelung** ist eine lineare Filteroperation, im Falle der Pegelmessung eine Tiefpassfilterung erster Ordnung. Sie wird im Zeitbereich durch die Faltung beschrieben [6]: Das Mittelungsergebnis entspricht der Faltung von quadriertem Signal und Mittler-Impulsantwort $h(t)$. Für die gedämpfte Schwingung erhält man:

$$m(t) = h(t) * u^2(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} e^{\frac{\psi - t}{\tau}}\right) \cdot \left(\hat{u} \cdot e^{-\psi/\vartheta} \cdot \sin(\omega_d \psi)\right)^2 \cdot d\psi$$ (für kausale Signale)

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad u(t) = \hat{u} \cdot e^{-t/\vartheta} \cdot \sin(\omega_d t) \qquad \omega_d = 2\pi f_d$$

Hierbei ist $h(t)$ die Impulsantwort des Mittlers, $u(t)$ ist die gedämpfte Schwingung, der Stern * ist das Symbol für die Faltung. Der Mittelwert $m(t)$ wird für den Zeitpunkt t berechnet, hierfür ist über die Zeitvariable ψ von 0 bis t zu integrieren. **Mittelwert** $m(t)$ meint hier also nicht den Mittelwert über die gesamte abklingende Schwingung, sondern den Mittelwert über den Zeitabschnitt von der Anregung bis zum (variablen) Zeitpunkt t. Die Mittelungszeitkonstante τ ist groß gegenüber der Schwingungsperiode T, deswegen kann der Beitrag der Sinusfunktion in guter Näherung vernachlässigt werden. Hiermit erhält man für den zeitvarianten Mittelwert:

$$m(t) = \frac{\tilde{u}^2}{1 - 2\tau/\vartheta} \cdot \left(e^{\frac{-2t}{\vartheta}} - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad \tilde{u} = \hat{u}/\sqrt{2} \qquad \text{für } 2\tau \neq \vartheta$$

Bei der Berechnung des Pegels ist zu beachten, dass ein quadriertes Signal vorliegt, deswegen ist die Formel für den Leistungspegel zu wählen. Der Bezugswert u_0 ist so zu wählen, dass sich für den stationären Fall ($\vartheta \to \infty$) der richtige Absolutpegel ergibt. Setzt man hingegen $u_0 = \tilde{u}$, so erhält man den relativen Pegel, der von 0 dB ausgehend abfällt.

$$L(t) = 10\lg\left(m(t)/u_0^2\right)\text{dB} \qquad \text{dB = Dezibel} \qquad u_0 = \text{Bezugswert}$$

Abb. 1.42 zeigt den mit exponentieller Mittelung bestimmten Pegelverlauf einer gedämpften Schwingung. Die Dämpfungszeitkonstante beträgt hierbei $\vartheta = 4\,\text{s}$. Mit Kenntnis der Schwingungsgleichung kann man natürlich den exakten Pegelverlauf angeben, hierzu muss lediglich die *e*-Funktion logarithmiert werden (gestrichelt eingezeichnet). Der messtechnisch ermittelte Pegelverlauf weicht hiervon signifikant ab. Im Bild sind zwei Kurven mit den Mittelungszeitkonstanten 0,125 s und 0,5 s eingezeichnet, sowie der theoretische Verlauf (gestrichelt).

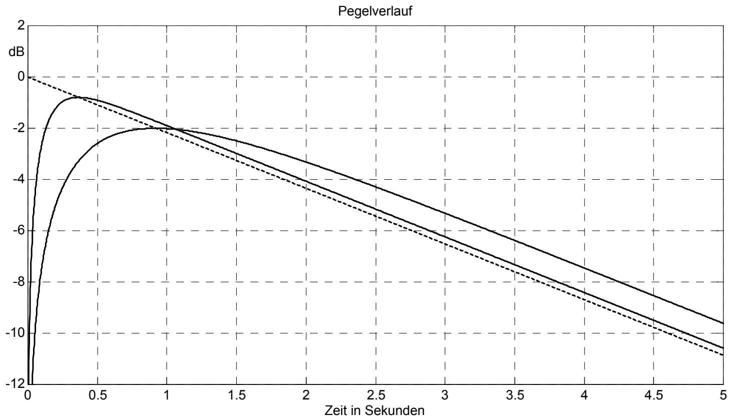


Abb. 1.42: Pegelverlauf einer exponentiell gedämpften Schwingung. Dämpfungszeitkonstante ϑ = 4 s, Mittelungszeitkonstante τ = 125 ms bzw. 500 ms. Für 500 ms liegt die Asymptote um 1,2 dB zu hoch, für 125 ms um 0,3 dB.

Nach einem kurzen, hauptsächlich von τ bestimmten Anstieg, fällt der Pegel näherungsweise mit der Zeitkonstanten ϑ ab. Wie man sieht, verlaufen die Messkurven nach kurzer Zeit parallel zu den exakten Werten, liegen aber zu hoch. Somit kann die Steigung, und damit die Systembedämpfung, in guter Genauigkeit bestimmt werden, bei Absolutmessungen können aber beachtliche Fehler entstehen. Der Pegelunterschied ergibt sich aus $L(t)$ zu:

$$\Delta L = 10\lg\frac{1}{1-2\tau/\vartheta}\text{dB} \qquad\qquad \vartheta = 10\tau \quad \} \quad \Delta L \approx 1\text{dB}$$

Die messtechnische Pegelermittlung wird um so genauer, je kürzer die Mittelungszeitkonstante gegenüber der Dämpfungszeitkonstante ist. Zu kurz darf die Mittelungszeitkonstante aber auch nicht gewählt werden, weil sonst die (quadrierte) Schwingung nicht mehr ausgemittelt wird und im Pegelverlauf Welligkeiten entstehen.

Abb. 1.42 kann auch entnommen werden, dass das gemessene **Pegelmaximum** niedriger als erwartet liegt. Durch Differenzieren und Nullsetzen erhält man die Lage des Maximums zu:

$$t_{\max} = \frac{\ln(2\tau/\vartheta)}{2/\tau - 1/\tau} \qquad\qquad m_{\max} = \tilde{u}^2 \cdot \left(\frac{\vartheta}{2\tau}\right)^{\frac{1}{1-\vartheta/2\tau}}$$

Das Maximum liegt um so niedriger, je größer die Mittelungszeitkonstante gewählt wird.

Eine gedämpfte Schwingung gehört signaltheoretisch zu den **Energiesignalen**. Die Signalenergie ergibt sich als Integral über die quadrierte Signalgröße; sie unterscheidet sich von der physikalischen Energie:

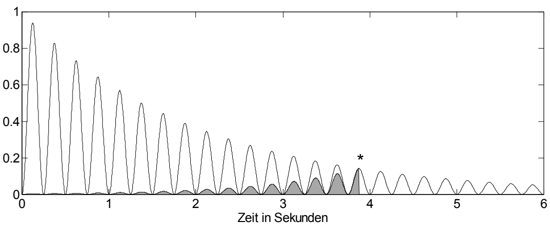
$$E_{Signal} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,dt \qquad E_{phys} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)v(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\cdot Z\cdot dt \qquad Z = \text{Impedanz}$$

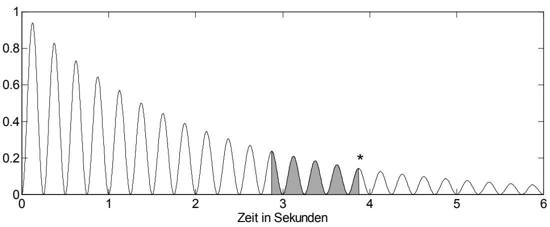
Die Signalenergie der gedämpften Schwingung kann aus der Schwingungsgleichung durch Integration berechnet werden:

$$E = \int_0^{\infty}\left(\hat{u}\cdot e^{-t/\vartheta}\cdot\sin(2\pi f_d t)\right)^2 dt \quad \xrightarrow{\vartheta\cdot f_d\ \gg 1} \quad E = \hat{u}^2\cdot\vartheta/4$$

Der Mittelwert über $m(t)$ ergibt dieselbe Signalenergie, unabhängig von τ. Wird die Energie jedoch über $m_{\max}$ ermittelt, so ist wegen $m_{\max} < \tilde{u}^2$ eine Korrektur erforderlich.

Neben der exponentiellen Mittelung gibt es noch andere Mittelungsarten: Die Blockmittelung erfolgt mit konstanter Gewichtung über ein festes Zeitintervall, die Hanning-Mittelung verwendet eine sinusförmige Gewichtung. Die Blockmittelung wird auch **lineare Mittelung** genannt, ein eher verwirrender Begriff, der aber in der Spektralanalyse gebräuchlich ist. Während die exponentielle Mittelung immer vom Signalanfang bis zum Messzeitpunkt verläuft (in **Abb. 1.43** mit einem Stern markiert), erfolgt die lineare Mittelung über ein Intervall fester Dauer, im Bild über 1 Sekunde. Bei der exponentiellen Mittelung wird nur das Intervallende verschoben, bei der linearen Mittelung hingegen Anfang und Ende. **Die Hanning-Mittelung** verwendet auch eine feste Mittelungsdauer (im Bild 2 s), gewichtet das Signal aber $\sin^2$-förmig. Sie kommt häufig in DFT-Analysatoren zum Einsatz, neben einer Vielzahl weiterer DFT-Fenster (Blackman, Kaiser, Bessel, Gauß, Flat-Top, etc.).





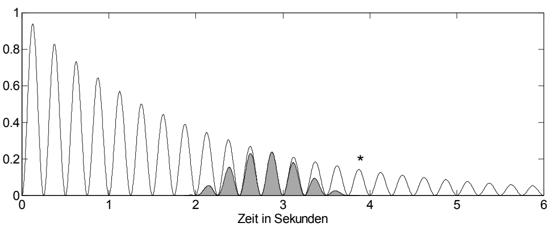


Abb. 1.43: Unterschiedliche Mittelungsarten: Exponentielle Mittelung (oben links), lineare Mittelung (oben rechts), Hanning-Mittelung (unten links).

Alle Mittelungsarten werden so kalibriert, dass sie bei stationären Signalen (konstanter Pegel) das gleiche Ergebnis liefern. Bei zeitvariantem Pegelverlauf ergeben sich aber Unterschiede. Bei frequenzselektiven Analysen (DFT, Terz, etc.) kommen weitere systemimmanente Fehler hinzu: Ein Filter reagiert um so träger auf das Eingangssignal, je schmalbandiger es ist. Bei breitbandigen Pegelmessungen (z.B. 20 Hz – 20 kHz) entstehen keine beachtlichen Fehler, bei selektiven Teiltonmessungen (z.B. 2500 Hz – 2520 Hz) u.U. schon.